Axialsymmetrische Strömungen von Zweikomponentenmedien bei kleinen Reynoldschen Zahlen

von J. Szlaža

Die Untersuchungen der Bewegung und des Verhaltens von Mehrphasen- und Mehrkomponentenmedien umfassen zahlreiche Gebiete in Wissenschaft und Technik. Hierzu gehören unter anderem Probleme der Meteorologie, Geophysik, der Kern- und Vakuumstechnik, der Biologie, der Agrotechnik, der chemischen, Wärme- und Nahrungsmittelindustrie.
Trotz dieser umfangreichen Anwendungsgebiete kann man sagen, daß sich die Wissenschaft von den Mehrphasensystemen im Entwicklungsstadium befindet. Für die gegenwärtige Etappe der Entwicklung der Mechanik der Mehrphasenmedien sind experimentelle Untersuchungen charakteristisch. Parallel zu den experimentellen Untersuchungen wendet man sich immer stärker der Theorie der Mehrphasenströmungen zu. Durch die Kompliziertheit der Mehrphasen- und Mehrkomponentenströmungen bedingt, kann sich zur Zeit die theoretische Lösung von konkreten Aufgaben nur auf wesentlich einschränkende und vereinfachte Bedingungen gründen. Folglich sind die Bemühungen begründet, Modelle zu finden und mathematisch zu beschreiben, die für eine bestimmte Klasse von Aufgaben die besten Resultate mit beschränkten Anwendungsmöglichkeiten liefern. Besonders geeignet für die Lösung konkreter Aufgaben sind Modelle von Mehrphasenströmungen, bei denen alle Phasen als Kontinuum betrachtet werden.
In der vorliegenden Arbeit werden wir uns bei der Beschreibung einer Zweikomponentenströmung an die Kontinuumshypothese halten und uns dabei auf das Modell von L. D. Landau und Ch. A. Rachmatulin [1], [2] stützen. Phasenübergänge und Wärmeaustauschprozesse werden vernachlässigt.
Der Verlauf vieler chemischer und physikalisch-chemischer Prozesse ist in bedeutendem Maße von hydrodynamischen Faktoren abhängig. Hierzu gehören insbesondere Prozesse heterogener Umwandlungen in Flüssigkeiten und Gasen. Die Mehrzahl der heterogenen Reaktionen, die von industrieller Bedeutung sind, verlaufen nach der Diffusionskinetik in unmittelbarer Umgebung von Körperoberflächen bzw. von eingelagerten Teilchen,

wie feste Partikel, Tröpfchen, Blasen. Bevor man aber überhaupt an die Lösung des Diffusionsproblems herangehen kann, muß man das Strömungsverhalten des Mehrkomponentenmediums in der Umgebung der eingelagerten Teilchen kennen. Die auftretenden Strömungsprobleme sind dreidimensional.
Wir untersuchen im weiteren die laminare Strömung eines Zweikomponentenmediums um ein isoliertes Teilchen, wobei wir voraussetzen, daß dieses Teilchen einen Rotationskörper darstellt und die Strömung parallel zur Symmetrieachse des Teilchens erfolgt. Die Diffusionsprobleme werden hier nicht betrachtet.
Wenn wir von dem von L. D. Landau und Ch. A. Rachmatulin entwickelten Modell für Mehrkomponentenmedien [1], [2] ausgehen, dann haben für eine laminare inkompressible Strömung die Bewegungs- und Kontinuitätsgleichungen der einzelnen Komponenten die Gestalt

$$\varrho_i\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}+\vec{v}_i\cdot\nabla\vec{v}_i\right)=\varkappa_i\left(-\nabla p_i+\mu_i\nabla^2\vec{v}_i\right)+\sum_{j=1}^{N}K_{ji}\left(\vec{v}_j-\vec{v}_i\right)+\varrho_i\vec{X}_i$$

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\varrho_i\vec{v}_i\right)=0$$

wobei $\vec{v}_i$, p_i, $\vec{X}_i$, $\varkappa_i=\frac{\varrho_i}{\varrho_i^*}$, ϱ_i, ϱ_i^*, μ_i, K_{ji} die Geschwindigkeiten, Drücke, äußeren Kräfte, Porositäten, reduzierten und wirklichen Dichten, Zähigkeitskoeffizienten und Wechselwirkungskoeffizienten der einzelnen Komponenten sind.
Betrachten wir nun die inkompressible, stationäre und axialsymmetrische Strömung eines Zweikomponentenmediums um ein Teilchen bei konstanten ϱ_i, μ_i, K_{ij} und ohne äußere Kräfte für kleine Reynoldsche Zahlen, dann kann man die Trägheitsglieder gegenüber den Reibungs- und Wechselwirkungsgliedern vernachlässigen, und die Gleichungen erhalten die Gestalt

$$\operatorname{grad} p_i=\mu_i\Delta\vec{v}_i+\frac{K}{\varkappa_i}\sum_{j=1}^{2}\left(\vec{v}_j-\vec{v}_i\right)\qquad (*)$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_i=0\qquad i=1,2$$

Ausgehend von diesen Gleichungen werden in der vorliegenden Arbeit Gleichungen zur Bestimmung der Stromfunktionen und Formeln für die Geschwindigkeiten, Drücke und Widerstandskräfte der einzelnen Komponenten und des Gemisches hergeleitet.
Des weiteren werden allgemeine Lösungen der Gleichungen zur Bestimmung der Stromfunktionen in Kugel- und Zylinderkoordinaten angegeben. Mit Hilfe dieser Lösungen können dann konkrete axialsymmetrische Strömungen von Zweikomponentenmedien untersucht werden.

1. Die Stromfunktion

Die Einführung der Stromfunktion stellt eine universelle Methode zur Beschreibung zweidimensionaler Strömungen von inkompressiblen Flüssigkeiten dar. Für derartige Strömungen läßt sich die Auffindung der Lösung der Bewegungsgleichungen auf die Bestimmung einer einzigen skalaren Funktion zurückführen. Auf den allgemeinen Fall dreidimensionaler Strömungen ist diese Methode nicht anwendbar. Es existieren jedoch Klassen dreidimensionaler Strömungen, wo es gelingt, die Lösung des Strömungsproblems auf die Bestimmung einer skalaren Funktion zu reduzieren.
Aus praktischen Gesichtspunkten ist dabei die Umströmung von Rotationskörpern parallel zu ihren Symmetrieachsen von besonderer Bedeutung. Derartige Strömungen nennt man axialsymmetrische Strömungen. Sie lassen sich durch die Existenz einer Stromfunktion charakterisieren.
Wenn die z-Achse die Symmetrieachse ist und der Winkel φ die Drehung um die z-Achse charakterisiert, dann verstehen wir unter einer axialsymmetrischen Strömung, wenn für die einzelnen Komponenten

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \varphi} = 0 \quad , \quad \vec{i}_\varphi \cdot \vec{v}_i = v_{i\varphi} = 0 \qquad (1.1)$$

gilt. Demzufolge ist die Strömung in jeder beliebigen Ebene φ = const gleichartig.

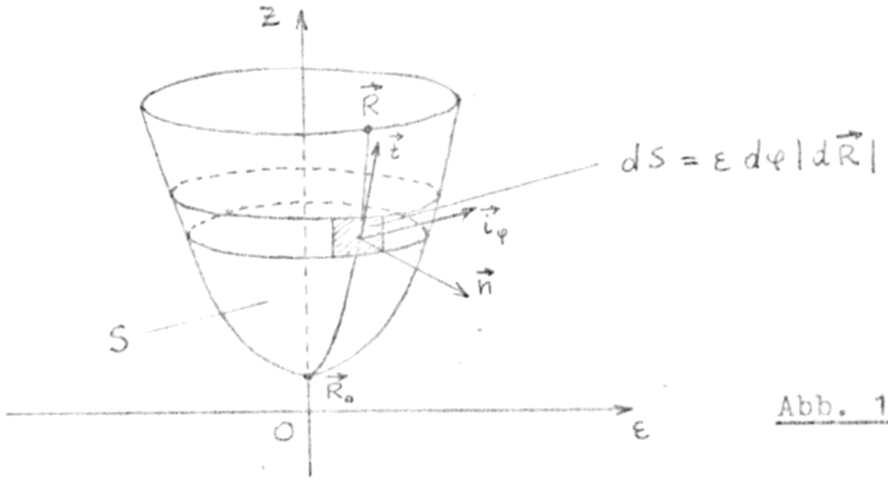

Abb. 1

Bezeichnen wir mit Q den Volumendurchsatz durch die Rotationsfläche S, dann ist auf Grund der Kontinuitätsgleichung die Größe Q eindeutig durch die Lage des Radiusvektors $\vec{R}$ bestimmt. Nach Definition [3] bezeichnet man als Stromfunktion im Punkte $\vec{R}$ die Größe

$$\Psi = \Psi(\vec{R}) = \frac{Q}{2\pi} \tag{1.2}$$

Die gleichen Überlegungen lassen sich bezüglich der einzelnen Komponenten anstellen, und wir erhalten

$$\Psi_i = \frac{Q_i}{2\pi} \tag{1.3}$$

Da sich der Durchsatz Q für das Gemisch nach der Formel

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \varkappa_i Q_i$$

bestimmen läßt, erhalten wir als Stromfunktion für ein Mehrkomponentenmedium

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \varkappa_i \Psi_i \tag{1.4}$$

Aus der Definition für die Stromfunktion geht hervor, daß auf der Symmetrieachse

$$\Psi_i = \Psi = 0 \tag{1.5}$$

ist.

Aus dem bisher Dargelegten kann man schlußfolgern, daß unter den Voraussetzungen der Inkompressibilität, der Symmetrie und ρ_i = const für dreidimensionale Mehrkomponentenströmungen Stromfunktionen für die einzelnen Komponenten sowie für das Gemisch existieren. Mit Hilfe der Stromfunktion kann man dann alle Parameter der Strömung bestimmen.

So erhält man unter anderem die Geschwindigkeiten der Komponenten, wenn man auf die Formel (1.3) zurückgreift.
Der Durchsatz der Komponenten durch die Rotationsfläche S, die durch Rotation der Kurve $\overset{\frown}{\vec{R}_0\vec{R}}$ um die z-Achse entsteht, ist gleich

$$Q_i = \int_S \vec{v}_i \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \int_0^{2\pi} \vec{v}_i \cdot \vec{n} \cdot \varepsilon\, d\varphi\, |d\vec{R}|$$

Unter Berücksichtigung von (1.3) erhalten wir hieraus

$$\Psi_i = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{v}_i \cdot \vec{n} \cdot \varepsilon\, |d\vec{R}|$$

Da die Stromfunktion auf der Symmetrieachse verschwindet, gelangen wir zu der Beziehung

$$\Psi_i = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} d\Psi_i = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{t} \cdot \nabla\Psi_i\, |d\vec{R}|$$

Setzen wir die beiden gewonnenen Ausdrücke für Ψ_i gleich, so erhalten wir nach einigen Umformungen Formeln für die Geschwindigkeiten der Komponenten

$$\vec{v}_i = \frac{1}{\varepsilon}\, \vec{i}_\varphi \times \operatorname{grad} \vec{\Psi}_i \qquad (1.6)$$

Aus (1.6) können wir leicht Formeln für die Geschwindigkeiten in verschiedenen Koordinatensystemen herleiten.
Für den Fall allgemeiner orthogonaler Rotationskoordinaten q_1, q_2, φ erhalten wir

$$v_{iq_1} = -\frac{h_2}{\varepsilon}\frac{\partial\Psi_i}{\partial q_2}\,, \quad v_{iq_2} = \frac{h_1}{\varepsilon}\frac{\partial\Psi_i}{\partial q_1} \qquad (1.7)$$

wobei $\varepsilon = \varepsilon(q_1, q_2)$ ist. Diese Formeln können wir in anderen Koordinatensystemen schreiben, denn es gilt
in Zylinderkoordinaten

$$\begin{array}{lll} q_1 = z & q_2 = r & q_3 = \varphi \\ h_1 = 1 & h_2 = 1 & h_3 = \frac{1}{r} \\ \varepsilon = r & & \end{array} \qquad (1.8)$$

in Kugelkoordinaten

$$q_1 = r \qquad q_2 = \Theta \qquad q_3 = \varphi \qquad\qquad (1.9)$$
$$h_1 = 1 \qquad h_2 = \frac{1}{r} \qquad h_3 = \frac{1}{r\sin\Theta}$$
$$\varepsilon = r\sin\Theta$$

Wir befassen uns nun mit der Herleitung der Gleichungen zur Bestimmung der Stromfunktion. Dazu werden wir zunächst einige Hilfsoperationen durchführen. Wir bilden rot $\vec{v}_i$, wobei wir der Einfachheit halber Zylinderkoordinaten verwenden. Wir erhalten

$$\operatorname{rot}\vec{v}_i = \vec{i}_\varphi\left(\frac{\partial v_{ir}}{\partial z} - \frac{\partial v_{iz}}{\partial r}\right)$$

und unter Berücksichtigung von (1.7) und (1.8) ist

$$\operatorname{rot}\vec{v}_i = \vec{i}_\varphi\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_i}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_i}{\partial r}\right)\right]$$

oder

$$\operatorname{rot}\vec{v}_i = \frac{\vec{i}_\varphi}{r}E^2\Psi_i \qquad\qquad (1.10)$$

wobei E^2 folgenden Operator darstellt:

$$E^2 = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \qquad\qquad (1.11)$$

Wenn wir auf (1.10) noch zweimal die Operation rot anwenden, dann gelangen wir zu dem Ausdruck

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}_i = -\frac{\vec{i}_\varphi}{r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]E^2\Psi_i$$

oder

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}_i = -\frac{\vec{i}_\varphi}{r}E^2\left(E^2\Psi_i\right) = -\frac{\vec{i}_\varphi}{r}E^4\Psi_i \qquad\qquad (1.12)$$

In Kugelkoordinaten hat der Operator E^2 die Gestalt

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-x^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad x = \cos\Theta \qquad\qquad (1.13)$$

und in allgemeinen Rotationskoordinaten

$$E^2 = \varepsilon h_1 h_2\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\right] \qquad (1.14)$$

Nach diesen Betrachtungen können wir nun aus (*) die Gleichungen zur Bestimmung der Stromfunktion herleiten.
Wie aus (*) zu ersehen ist, sind die Bewegungsgleichungen für die beiden Komponenten über die Wechselwirkungsglieder miteinander gekoppelt. Wir können die beiden Gleichungen entkoppeln, indem wir diese jeweils miteinander addieren und voneinander subtrahieren. Danach erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1}\operatorname{grad} p &= \Delta \vec{w}_1 , \quad \operatorname{div}\vec{w}_1 = 0 \\ \frac{1}{\mu_2}\operatorname{grad} p^* &= \Delta \vec{w}_2 - \gamma^2 \vec{w}_2 , \quad \operatorname{div}\vec{w}_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

wobei

$$\begin{aligned} & p = \varkappa_1 p_1 + \varkappa_2 p_2 , \quad p^* = \mu^* p_1 - p_2 \\ & \vec{w}_1 = \varkappa_1 \vec{v}_1 + \varkappa_2 \mu^* \vec{v}_2 , \quad \vec{w}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ & \mu^* = \frac{\mu_2}{\mu_1} , \quad \gamma^2 = K_1 + K_2 , \quad K_i = \frac{K}{\mu_i \varkappa_i} \end{aligned} \tag{1.16}$$

sind.
Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichungen können wir die Bewegungsgleichungen aus (1.15) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_1}\operatorname{grad} p + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{w}_1 = 0 \\ & \frac{1}{\mu_2}\operatorname{grad} p^* + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{w}_2 + \gamma^2\vec{w}_2 = 0 . \end{aligned} \tag{1.17}$$

Wenden wir auf diese Gleichungen die Operation rot an, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{w}_1 = 0 \\ & \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{w}_2 + \gamma^2 \operatorname{rot}\vec{w}_2 = 0 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (1.10), (1.12) und (1.16) erhalten wir hieraus Gleichungen zur Bestimmung der Stromfunktion, nämlich

$$\begin{aligned} & E^4 \chi_1 = 0 \\ & E^2(E^2\chi_2 - \gamma^2\chi_2) = 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

wobei

$$\begin{aligned} & \chi_1 = \varkappa_1 \Psi_1 + \varkappa_2 \mu^* \Psi_2 \\ & \chi_2 = \Psi_1 - \Psi_2 \end{aligned} \tag{1.19}$$

sind. Bestimmt man nun aus (1.18) die Funktionen χ_i, dann lassen sich die Stromfunktionen Ψ_i aus (1.19) durch einfache algebraische Umformungen finden, nämlich

$$\Psi_1 = \frac{\chi_1 + \varkappa_2 \mu^* \chi_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2 \mu^*}$$
$$\Psi_2 = \frac{\chi_1 - \varkappa_1 \chi_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2 \mu^*} \qquad (1.20)$$

Die Stromfunktion für das Zweikomponentenmedium hat unter Berücksichtigung von (1.4) und(1.20) die Gestalt

$$\Psi = \frac{1}{\varkappa_1 + \varkappa_2 \mu^*} \left[\chi_1 + \varkappa_1 \varkappa_2 \left(\mu^* - 1 \right) \chi_2 \right] \qquad (1.21)$$

Wir sehen also, daß bei der Untersuchung von axialsymmetrischen Strömungen von Zweikomponentenmedien sich die Lösung des Problems auf die Bestimmung der Funktionen χ_i aus den Gleichungen (1.18) zurückführen läßt, mit deren Hilfe sich dann die Stromfunktionen und damit auch die Strömungsparameter finden lassen.

2. Randbedingungen für die Stromfunktion

Zur Untersuchung konkreter axialsymmetrischer Strömungsprobleme von Zweikomponentenmedien benötigen wir neben den Gleichungen (1.18) zur Bestimmung von χ_i noch Randbedingungen für die Stromfunktion der Komponenten. Dabei ist es zweckmäßig, bei der Beschreibung von Strömungen um Rotationskörper Koordinatensysteme zu verwenden, die für die gegebene Körperoberfläche charakteristisch sind. Wir bezeichnen mit $\vec{n}$ den normalen und mit $\vec{s}$ den tangentialen Einheitsvektor in einem Punkt der Körperoberfläche, so daß das System von Einheitsvektoren $(\vec{n}, \vec{s}, \vec{i}_\varphi)$ vorliegt.

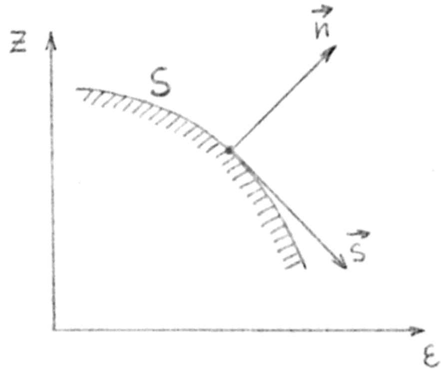

Abb. 2

Im weiteren werden wir ein System lokaler orthogonaler krummliniger Koordinaten verwenden, für das wir folgende Größen einführen:

$$\begin{array}{lll} q_1 = n & q_2 = s & q_3 = \varphi \\ \vec{i}_1 = \vec{n} & \vec{i}_2 = \vec{s} & \vec{i}_3 = \vec{i}_\varphi \\ h_1 = 1 & h_2 = 1 & h_3 = \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \qquad (2.1)$$

Dann ist

$$\nabla = \vec{n}\frac{\partial}{\partial n} + \vec{s}\frac{\partial}{\partial s} + \vec{i}_\varphi \cdot \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

und gemäß (1.7)

$$V_{in} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \Psi_i}{\partial s} \quad , \quad V_{is} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \Psi_i}{\partial n} \qquad (2.2)$$

a) Erfolgt nun die Bewegung eines Rotationskörpers in einem unendlich ausgedehnten Zweikomponentenmedium mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{U} = \vec{i}_z U$, dann haben wir für feste Körper die Haftbedingungen

$$\begin{array}{l} (\vec{v}_i - \vec{U}) \cdot \vec{n} = 0 \\ (\vec{v}_i - \vec{U}) \cdot \vec{s} = 0 \end{array} \qquad (2.3)$$

Setzen wir (2.1) in (2.2) ein, berücksichtigen dabei, daß

$$\vec{n} \cdot \vec{i}_z = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \quad , \quad \vec{s} \cdot \vec{i}_z = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial n}$$

sind und integrieren die erste Gleichung in (2.2) über die Oberfläche des Körpers, dann erhalten wir die Randbedingungen

$$\begin{array}{l} \left(\Psi_i + \frac{1}{2}\varepsilon^2 U\right)\Big|_S = 0 \\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\Psi_i + \frac{1}{2}\varepsilon^2 U\right)\Big|_S = 0 \end{array} \qquad (2.4)$$

Wenn das Zweikomponentenmedium unendlich ausgedehnt ist und sich im Unendlichen in Ruhe befindet, dann gilt

$$\frac{\Psi_i}{r^2} \to 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty \qquad (2.5)$$

b) Der Rotationskörper befinde sich in Ruhe und werde von einem Zweikomponentenmedium umströmt, dessen Komponenten im Unendlichen die Geschwindigkeiten $\vec{U}_i = -\vec{i}_z U_i$ besitzen.

Für feste Körper gelten auf der Oberfläche die Haftbedingungen, und wir erhalten aus (2.2)

$$\left.\psi_i\right|_S = 0 \qquad \left.\frac{\partial \psi_i}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{2.6}$$

In weiter Entfernung vom Körper ist die Strömung homogen, und es gilt $\vec{v}_i = \vec{U}_i$. Demzufolge ist

$$v_{iz} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \psi_i}{\partial \varepsilon} = -U_i$$

Hieraus erhalten wir die Bedingung für ψ_i im Unendlichen, nämlich

$$\psi_i \to \frac{1}{2}\varepsilon^2 U_i \quad \text{für} \quad r \to \infty \tag{2.7}$$

3. Formeln für die Geschwindigkeiten und Drücke

In Punkt 1 wurde festgestellt, daß zur Bestimmung der Strömungsparameter es ausreicht, die Funktionen χ_i zu finden. Hat man also die χ_i aus den Gleichungen (1.18) bestimmt, dann erhält man ohne große Schwierigkeiten Formeln für die Geschwindigkeiten und Drücke der einzelnen Komponenten und für das Gemisch.

a) Setzen wir (1.20) in (1.7) ein, so erhalten wir für die Geschwindigkeiten der Komponenten die Ausdrücke

$$v_{iq_1} = -\frac{1}{\varkappa_1 + \varkappa_2 \mu^*} \cdot \frac{h_2}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\chi_1 + \alpha_i \chi_2\right)$$
$$v_{iq_2} = \frac{1}{\varkappa_1 + \varkappa_2 \mu^*} \cdot \frac{h_1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\chi_1 + \alpha_i \chi_2\right) \tag{3.1}$$

wobei

$$\alpha_1 = \varkappa_2 \mu^*, \quad \alpha_2 = -\varkappa_1$$

sind.

Da sich die Geschwindigkeiten des Zweikomponentenmediums nach der Formel

$$v_{q_k} = \varkappa_1 v_{1q_k} + \varkappa_2 v_{2q_k} \tag{3.2}$$

bestimmen lassen, erhalten wir aus (3.1)

$$v_{q_1} = -\frac{1}{\varkappa_1 + \varkappa_2 \mu^*} \cdot \frac{h_2}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\chi_1 + \varkappa_1 \varkappa_2 (\mu^* - 1) \chi_2 \right]$$

$$v_{q_2} = \frac{1}{\varkappa_1 + \varkappa_2 \mu^*} \frac{h_1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\chi_1 + \varkappa_1 \varkappa_2 (\mu^* - 1) \chi_2 \right] \quad (3.3)$$

b) Bei der Bestimmung der Drücke greifen wir auf die Gleichungen (1.17) zurück. Setzen wir in (1.17) die Ausdrücke (1.7) und (1.10) ein und berücksichtigen dabei (1.16) und (1.19), so gelangen wir zu den Beziehungen

$$\frac{1}{\mu_1} \operatorname{grad} p = \frac{\vec{i_\varphi}}{\varepsilon} \times \operatorname{grad} (E^2 \chi_1)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \operatorname{grad} p^* = \frac{\vec{i_\varphi}}{\varepsilon} \times \operatorname{grad} \left[E^2 \chi_2 - \gamma^2 \chi_2 \right]$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial q_1} = -\frac{\mu_1}{\varepsilon} \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_2} (E^2 \chi_1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial q_2} = \frac{\mu_1}{\varepsilon} \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} (E^2 \chi_1) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial q_1} = -\frac{\mu_2}{\varepsilon} \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_2} (E^2 \chi_2 - \gamma^2 \chi_2)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial q_2} = \frac{\mu_2}{\varepsilon} \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} (E^2 \chi_2 - \gamma^2 \chi_2)$$

Die Drücke p und p^* lassen sich durch einfache Integration aus (3.4) bestimmen. Sind p und p^* bekannt, dann findet man die Partialdrücke der Komponenten aus den Beziehungen (1.16), nämlich

$$p_1 = \frac{p + \varkappa_2 p^*}{\varkappa_1 + \varkappa_2 \mu^*}$$

$$p_2 = \frac{\mu^* p - \varkappa_1 p^*}{\varkappa_1 + \varkappa_2 \mu^*} \quad (3.5)$$

Die Formeln (3.1), (3.3) und (3.4) kann man in Zylinder- und Kugelkoordinaten schreiben, wenn man auf die Beziehungen (1.8) und (1.9) zurückgreift.

4. Der Körperwiderstand

Wir werden die auf die Körperoberfläche wirkenden Spannungen in den im Punkt 2 betrachteten krummlinigen Koordinaten ausdrücken. Der Vektor der Spannungen der einzelnen Komponenten, die auf ein Oberflächenelement des Körpers mit der äußeren Normalen $\vec{n}$ wirken, hat die Gestalt

$$\vec{P}_{in} = \vec{n}\left(-p_i + 2\mu_i \frac{\partial v_{in}}{\partial n}\right) + \vec{s}\mu_i\left(\frac{\partial v_{in}}{\partial s} + \frac{\partial v_{is}}{\partial n}\right)$$

Der erste Summand in dieser Gleichung sind die Normalspannungen, während dem der zweite Summand die Tangentialspannungen darstellt. Den Spannungsvektor $\vec{P}_{in}$ kann man auch in der Form

$$\vec{P}_{in} = -\vec{n}p_i + 2\mu_i\left(\vec{n}\frac{\partial v_{in}}{\partial n} + \vec{s}\frac{\partial v_{in}}{\partial s}\right) + \vec{s}\mu_i\left(\frac{\partial v_{is}}{\partial n} - \frac{\partial v_{in}}{\partial s}\right) \quad (4.1)$$

schreiben. Da

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}_i = \vec{i}_\varphi\left(\frac{\partial v_{is}}{\partial n} - \frac{\partial v_{in}}{\partial s}\right)$$

$$\mathrm{grad}\,v_{in} = \vec{n}\frac{\partial v_{in}}{\partial n} + \vec{s}\frac{\partial v_{in}}{\partial s}$$

sind, erhalten wir aus (4.1) unter Berücksichtigung von (1.10) und (2.2)

$$\vec{P}_{in} = -\vec{n}p_i - 2\mu_i\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Psi_i}{\partial s}\right) + \vec{s}\mu_i\cdot\frac{1}{\varepsilon}E^2\Psi_i \quad (4.2)$$

Auf Grund der Symmetrie der Strömung sind die Kräfte, die von seiten der Komponenten auf den Körper wirken, parallel zur Symmetrieachse gerichtet, und in positiver Richtung der z-Achse erhalten wir

$$F_{iz} = \int_S \vec{P}_{iz}\cdot\vec{n}\,dS = \int_S P_{inz}\,dS \quad (4.3)$$

Aus (4.2) ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$\vec{n}\cdot\vec{i}_z = \frac{\partial\varepsilon}{\partial s}, \quad \vec{i}_z\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \vec{s}\cdot\vec{i}_z = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}$$

nach einigen Umformungen folgender Ausdruck für P_{inz}

$$P_{inz} = \vec{P}_{in}\cdot\vec{i}_z = -\frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial s}(\varepsilon^2 p_i) - \varepsilon^2\frac{\partial p_i}{\partial s}\right] -$$

$$-2\mu_i\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial z}\right) - \mu_i\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}E^2\Psi_i$$

Setzen wir den gewonnenen Ausdruck für P_{inz} in (4.3) ein, gelangen wir zu der Beziehung

$$F_{iz} = \int P_{inz} \cdot 2\pi\varepsilon\, ds = -\pi \int \frac{\partial}{\partial s}(\varepsilon^2 p_i)\, ds + \pi \int \varepsilon^2 \frac{\partial p_i}{\partial s}\, ds -$$
$$- 4\pi\mu_i \int \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right) ds - 2\pi\mu_i \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} E^2\psi_i\, ds \qquad (4.4)$$

Die Integration in (4.4) erfolgt über die Schnittfläche, die durch den Schnitt der φ-Fläche mit dem Körper entsteht, wobei als Integrationsgrenzen der obere und der untere Punkt, in denen die Körperoberfläche die Symmetrieachse schneidet, genommen werden. Da in diesen Punkten $\varepsilon = 0$ ist, verschwinden in (4.4) das erste und das dritte Integral. Demzufolge haben wir die Beziehung

$$F_i = F_{iz} = \pi \int \varepsilon^2 \frac{\partial p_i}{\partial s}\, ds - 2\pi\mu_i \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} E^2\psi_i\, ds \qquad (4.5)$$

Unter Berücksichtigung von (3.5), (3.4) und (1.20) gelten die Formeln

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = \frac{\mu_i}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n}\left[E^2\psi_i + \eta_i \gamma^2 \chi_2\right] \qquad i = 1,2$$

wobei

$$\eta_1 = -\frac{\varkappa_2 \mu^*}{\varkappa_1 + \varkappa_2\mu^*}, \quad \eta_2 = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2\mu^*}$$

sind. Setzen wir diese Ausdrücke in (4.5) ein, so erhalten wir für die durch die Komponenten hervorgerufenen Körperwiderstände die Formeln

$$F_i = \pi\mu_i \int \left[\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{E^2\psi_i}{\varepsilon^2}\right) + \eta_i \gamma^2 \varepsilon \frac{\partial \chi_2}{\partial n}\right] ds \qquad (4.6)$$

Das Zweikomponentenmedium erzeugt den Körperwiderstand $F = \varkappa_1 F_1 + \varkappa_2 F_2$, so daß wir unter Berücksichtigung von (4.1) und (1.19)

$$F = \pi\mu_1 \int \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{E^2\chi_1}{\varepsilon^2}\right) ds \qquad (4.7)$$

erhalten.

Die in den Punkten 3 und 4 gewonnenen Formeln für die Geschwindigkeiten, Drücke und den Körperwiderstand der einzelnen Komponenten und des Gemisches gelten für axialsymmetrische

Strömungen von Zweikomponentenmedien.
Setzen wir in diesen Ausdrücken $\varsigma_1 = \varsigma_2$, $\varsigma_1^* = \varsigma_2^*$, $\mu_1 = \mu_2$, so gelangen wir zu den bekannten Formeln für axialsymmetrische Strömungen eines homogenen Mediums.

5. Allgemeine Lösung der Gleichungen (1.18) in Kugelkoordinaten

Zur Bestimmung der Stromfunktionen für die Komponenten und das Gemisch nach (1.20) und (1.21) müssen wir die Gleichungen (1.18) lösen. Diese haben die Gestalt

$$\begin{aligned} E^4 \chi_1 &= 0 \\ E^2[E^2\chi_2 - \gamma^2 \chi_2] &= 0 \end{aligned} \qquad (5.1)$$

wobei gemäß (1.13) der Operator E^2 in Kugelkoordinaten die Form

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-x^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad , \quad x = \cos\Theta \qquad (5.2)$$

hat. Die erste Gleichung aus (5.1) ist von J. Happel und H. Brenner in [3] ausführlich untersucht worden. Verwenden wir die dort erzielten Ergebnisse, so können wir die allgemeine Lösung sofort hinschreiben, nämlich

$$\begin{aligned} \chi_1 = &\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n r^n + b_n r^{-n+1} + c_n r^{n+2} + d_n r^{-n+3}\right] L_n^{-\frac{1}{2}}(x) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n' r^n + b_n' r^{-n+1} + c_n' r^{n+2} + d_n' r^{-n+3}\right] M_n^{-\frac{1}{2}}(x) \end{aligned} \qquad (5.3)$$

wobei $L_n^\nu(x)$, $M_n^\nu(x)$ - Hegenbauersche Funktionen erster und zweiter Art vom n-ten Grade und ν-ter Ordnung sind [4]. Die in (5.3) auftretenden Koeffizienten werden mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt.
Befassen wir uns nun mit der Lösung der zweiten Gleichung aus (5.1). Es gilt

$$E^2[E^2\chi_2 - \gamma^2\chi_2] = 0 \qquad (5.4)$$

Die Lösung dieser Gleichung suchen wir in der Gestalt

$$\chi_2 = \chi_2^{(1)} + \chi_2^{(2)} \qquad (5.5)$$

wobei

$$E^2\chi_2^{(1)} - \gamma^2\chi_2^{(1)} = 0$$
$$E^2\chi_2^{(2)} - \gamma^2\chi_2^{(2)} = W \qquad (5.6)$$

gilt und $W = W(r,\theta)$ der Gleichung

$$E^2 W = 0 \qquad (5.7)$$

genügt.
Wir untersuchen zunächst die erste Gleichung aus (5.6).

$$E^2\chi_2^{(1)} - \gamma^2\chi_2^{(1)} = 0 \qquad (5.8)$$

Die Lösung dieser homogenen Gleichung suchen wir in der Form

$$\chi_2^{(1)} = R(r)\,Z(x) \qquad (5.9)$$

Setzen wir (5.9) in (5.8) ein und berücksichtigen dabei (5.?), so erhalten wir nach der Variablentrennung folgende Gleichungen zur Bestimmung von R(r) und Z(x)

$$r^2R'' - \left[\gamma^2r^2 + n(n-1)\right]R = 0$$
$$(1-x^2)\,Z'' + n\,(n-1)\,Z = 0 \qquad (5.10)$$

Nach E. Kamke [5] läßt sich die Lösung der ersten Gleichung aus (5.10) in modifizierten Besselfunktionen finden, die Lösung der zweiten Gleichung kann man wiederum in Hegenbauerschen Funktionen darstellen. Somit erhalten wir

$$R(r) = \alpha_n\sqrt{r}\,I_{n-\frac{1}{2}}(\gamma r) + \beta_n\sqrt{r}\,I_{-n+\frac{1}{2}}(\gamma r)$$
$$Z(x) = \alpha_n'\,L_n^{-\frac{1}{2}}(x) + \beta_n'\,M_n^{-\frac{1}{2}}(x)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (5.9) ein, erhalten wir für $\chi_2^{(1)}$ die Lösung

$$\chi_2^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\sqrt{r}\,I_{n-\frac{1}{2}}(\gamma r) + B_n\sqrt{r}\,I_{-n+\frac{1}{2}}(\gamma r)\right]\begin{matrix}L_n^{-\frac{1}{2}}(x)\\ M_n^{-\frac{1}{2}}(x)\end{matrix} \qquad (5.11)$$

Nach J. Happel, H. Brenner [3] ergibt sich für die Lösung der Gleichung (5.7)

$$W(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n r^n + D_n r^{-n+1}\right]\begin{matrix}L_n^{-\frac{1}{2}}(x)\\ M_n^{-\frac{1}{2}}(x)\end{matrix} \qquad (5.12)$$

Aus der Struktur der Beziehungen (5.11) und (5.12) ist zu ersehen, daß wir die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung aus (5.6) in der Gestalt

$$\chi_2^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n(r) \begin{matrix} L_n^{-\frac{1}{2}}(x) \\ M_n^{-\frac{1}{2}}(x) \end{matrix} \qquad (5.13)$$

suchen können. Setzen wir (5.13) in (5.6) ein und berücksichtigen dabei, daß die Hegenbauerschen Funktionen der zweiten Gleichung aus (5.10) genügen, so erhalten wir zur Bestimmung von $\Omega_n(r)$ die Gleichung

$$r^2 \Omega_n'' - [\gamma^2 r^2 + n(n-1)]\, \Omega_n = C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+3} \qquad (5.14)$$

Wie aus (5.10) zu ersehen ist, läßt sich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung von (5.14) in den modifizierten Besselfunktionen $\sqrt{r}\, I_{n-\frac{1}{2}}(\gamma r)$ und $\sqrt{r}\, I_{-n+\frac{1}{2}}(\gamma r)$ darstellen. Wir bestimmen nun die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (5.14) nach dem Verfahren der Variation der Konstanten. Wir suchen also $\Omega_n(r)$ in der Gestalt

$$\Omega_n(r) = \Theta_n(r) \sqrt{r}\, I_{n-\frac{1}{2}}(\gamma r) \qquad (5.15)$$

wobei $\Theta_n(r)$ vorläufig noch als unbekannte Funktionen von r angesehen werden. Die Gleichung zur Bestimmung von $\Theta_n(r)$ erhalten wir, indem wir (5.15) in (5.14) einsetzen und berücksichtigen, daß $\sqrt{r}\, I_{n-\frac{1}{2}}(\gamma r)$ der ersten Gleichung aus (5.10) genügt.
Es gilt somit

$$\sqrt{r}\, I_{n-\frac{1}{2}}\, \Theta'' + 2\left(\sqrt{r}\, I_{n-\frac{1}{2}}\right)' \Theta_n' = C_n r^n + D_n r^{-n+1}$$

Nach Integration dieser Gleichung finden wir

$$\Theta_n' = \frac{1}{r\, I_{n-\frac{1}{2}}^2} \left[C_n \int r^{n+\frac{1}{2}} I_{n-\frac{1}{2}}\, dr + D_n \int r^{-n+\frac{3}{2}} I_{n-\frac{1}{2}}\, dr \right]$$

Die in diesem Ausdruck auftretenden Integrale lassen sich berechnen [7], und wir erhalten schließlich

$$\Theta_n(r) = -\frac{1}{\gamma^2 I_{n-\frac{1}{2}}} \left[C_n r^{n-\frac{1}{2}} + D_n r^{-n+\frac{1}{2}} \right]$$

Setzen wir die gefundenen $\Theta_n(r)$ in (5.15) ein, so erhalten wir gemäß (5.13) die partikuläre Lösung

$$\chi_2^{(2)} = -\frac{1}{\gamma^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n r^n + D_n r^{-n+1}\right] \begin{matrix} L_n^{-\frac{1}{2}}(x) \\ M_n^{-\frac{1}{2}}(x) \end{matrix} \tag{5.16}$$

Unter Berücksichtigung von (5.11) und (5.16) liefert uns (5.5) die allgemeine Lösung der Gleichung (5.4), nämlich

$$\begin{aligned} \chi_2 = &\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sqrt{r}\left[A_n I_{n-\frac{1}{2}}(\gamma r) + B_n I_{-n+\frac{1}{2}}(\gamma r)\right] - \frac{1}{\gamma^2}\left[C_n r^n + D_n r^{-n+1}\right]\right\} L_n^{-\frac{1}{2}}(x) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\sqrt{r}\left[A'_n I_{n-\frac{1}{2}}(\gamma r) + B'_n I_{-n+\frac{1}{2}}(\gamma r)\right] - \frac{1}{\gamma^2}\left[C'_n r^n + D'_n r^{-n+1}\right]\right\} M_n^{-\frac{1}{2}}(x) \end{aligned} \tag{5.17}$$

wobei hier die zweite Summe genauso wie in (5.3) mit n = 2 beginnt, da die Beziehungen

$$\begin{aligned} L_0^{-\frac{1}{2}}(x) &= 1 \qquad & L_1^{-\frac{1}{2}}(x) &= -x \\ M_0^{-\frac{1}{2}}(x) &= -x \qquad & M_1^{-\frac{1}{2}}(x) &= -1 \end{aligned} \tag{5.18}$$

berücksichtigt wurden.

Die Funktionen χ_1 und χ_2 aus (5.3) und (5.17) stellen die allgemeine Lösung der Gleichungen (5.1) in Kugelkoordinaten dar. Für konkrete axialsymmetrische Strömungsprobleme müssen noch die in (5.3) und (5.17) auftretenden Koeffizienten mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden.

Aus der Struktur der Hegenbauerschen Funktionen zweiter Art $M_n^{-\frac{1}{2}}(x)$ kann man ersehen [4], daß diese für x = $\pm$1 eine Singularität besitzen.

Ist aber das Strömungsproblem mit einer derartigen Singularität nicht behaftet, dann sind die in (5.3) und (5.17) mit Strich versehenen Konstanten für alle n gleich Null zu setzen. Weiterhin läßt sich unter Berücksichtigung von (3.1), (3.3), (5.3), (5.17) und (5.18) zeigen, daß in Kugelkoordinaten für n = 0 und n = 1 die Tangentialgeschwindigkeiten für θ = 0 unendlich große Werte annehmen. Hieraus folgt, daß sich die Funktionen χ_1 und χ_2 für unterschiedliche Strömungsprobleme in Kugelkoordinaten in der Gestalt

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n r^n + b_n r^{-n+1} + c_n r^{n+2} + d_n r^{-n+3}\right] L_n^{-\frac{1}{2}}(x) \\ \chi_2 &= \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\sqrt{r}\left[A_n I_{n-\frac{1}{2}}(\gamma r) + B_n I_{-n+\frac{1}{2}}(\gamma r)\right] - \frac{1}{\gamma^2}\left[C_n r^n + D_n r^{-n+1}\right]\right\} L_n^{-\frac{1}{2}}(x) \end{aligned} \tag{5.19}$$

darstellen lassen.
Aus den Randbedingungen (2.4) und (2.7) ist zu ersehen, daß für die axialsymmetrische Strömung um ein kugelförmiges Teilchen $n = 2$ ist.
In diesem Falle ist

$$L_2^{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)$$

und unter Verwendung der Formeln [6]

$$t^{-\kappa-\frac{1}{2}} I_{\kappa+\frac{1}{2}}(t) = 2^\kappa \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^\kappa}{d(t^2)^\kappa} \left(\frac{sh\, t}{t}\right)$$

$$t^{-\kappa-\frac{1}{2}} I_{-\kappa-\frac{1}{2}}(t) = 2^\kappa \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^\kappa}{d(t^2)^\kappa} \left(\frac{ch\, t}{t}\right)$$

können wir (5.19) in der Gestalt

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{2}(1-x^2)\left[a_2 r^2 + b_2 r^{-1} + c_2 r^4 + d_2 r\right] \\ \chi_2 &= \frac{1}{2}(1-x^2)\left\{A_2\left(\gamma-\frac{1}{r}\right)e^{\gamma r} + B_2\left(\gamma+\frac{1}{r}\right)e^{-\gamma r} - \frac{1}{\gamma^2}\left[C_2 r^2 + D_2 r^{-1}\right]\right\} \end{aligned} \tag{5.20}$$

schreiben.

6. Allgemeine Lösung der Gleichungen (1.18) in Zylinderkoordinaten

Wir gehen wieder von den Gleichungen (1.18) aus und untersuchen ihre Lösungen in Zylinderkoordinaten. Es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} E^4 \chi_1 &= 0 \\ E^2\left[E^2 \chi_2 - \gamma^2 \chi_2\right] &= 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

wobei gemäß (1.11)

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6.2}$$

ist.

a) Betrachten wir zunächst die erste Gleichung aus (6.1)

$$E^4 \chi_1 = 0 \tag{6.3}$$

Die Lösung dieser Gleichung suchen wir in der Form

$$\chi_1 = \chi_1^{(1)} + \chi_1^{(2)} \tag{6.4}$$

wobei

$$E^2 \chi_1^{(1)} = 0$$
$$E^2 \chi_1^{(2)} = W_1 \tag{6.5}$$

sind und $W_1 = W_1(r,z)$ der Gleichung

$$E^2 W_1 = 0 \tag{6.6}$$

genügt. Wir untersuchen erst die homogene Gleichung aus (6.5). Mit dem Ansatz

$$\chi_1^{(1)} = R_1(r)\left(A_1 \cos\lambda z + B_1 \sin\lambda z\right) \tag{6.7}$$

erhalten wir für $R_1(r)$ die Differentialgleichung

$$r R_1'' - R_1' - \lambda^2 r R_1 = 0 \tag{6.8}$$

Diese Gleichung hat nach E. Kamke [5] die Lösung

$$R_1(r) = C_1 r I_1(\lambda r) + D_1 r K_1(\lambda r) \tag{6.9}$$

wobei $I_1(\lambda r)$ und $K_1(\lambda r)$ modifizierte Besselfunktionen erster und zweiter Art vom ersten Grade sind.
Unter Berücksichtigung von (6.9) finden wir aus (6.7)

$$\chi_1^{(1)} = r\left\{\left[C_1 I_1(\lambda r) + D_1 K_1(\lambda r)\right]\left(A_1 \cos\lambda z + B_1 \sin\lambda z\right)\right\} \tag{6.10}$$

Die Struktur der Lösung der Gleichung (6.6) ist die gleiche wie $\chi_1^{(1)}$, aber mit anderen Koeffizienten, etwa

$$W_1 = r\left\{\left[c_1 I_1(\lambda r) + d_1 K_1(\lambda r)\right]\left(A_1 \cos\lambda z + B_1 \sin\lambda z\right)\right\} \tag{6.11}$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung aus (6.5)

$$E^2 \chi_1^{(2)} = W_1 \tag{6.12}$$

suchen wir in der Gestalt

$$\chi_1^{(2)} = \Omega_1(r)\left(A_1 \cos\lambda z + B_1 \sin\lambda z\right) \tag{6.13}$$

Da sich die allgemeine Lösung der Gleichung (6.8) nach (6.9) aus zwei linear unabhängigen partikulären Lösungen $r I_1(\lambda r)$ und $r K_1(\lambda r)$ zusammensetzt, werden wir im weiteren unsere

Untersuchungen mit $I_1(\lambda r)$ fortführen. Analoge Ergebnisse erhält man auch bezüglich $K_1(\lambda r)$. Wenn wir also (6.13) in (6.12) einsetzen, so erhalten wir für $\Omega_1(r)$ die Differentialgleichung

$$r\Omega_1'' - \Omega_1' - \lambda^2 r\,\Omega_1 = c_1 r^2 I_1(\lambda r) \qquad (6.14)$$

Da die homogene Gleichung (6.8) die Lösung $r\,I_1(\lambda r)$ besitzt, suchen wir die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (6.14) nach dem Verfahren der Variation der Konstanten in der Gestalt

$$\Omega_1(r) = \Theta_1(r)\, r\, I_1(\lambda r) \qquad (6.15)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (6.14) ein, so läßt sich $\Theta_1(r)$ aus der Gleichung

$$r I_1 \Theta_1'' + \left[2(rI_1)' - I_1\right]\Theta_1' = c_1 r I_1$$

bestimmen. Nach Integration gelangen wir zu der Beziehung [7]

$$\Theta_1' = \frac{c_1}{r I_1^2}\int r^2 I_1^2\,dr = \frac{c_1 r}{2 I_1^2}\left[I_1^2 - I_0 I_2\right]$$

Unter Verwendung der rekursiven Formeln [6]

$$\begin{aligned} I_0(\lambda r) &= \frac{1}{\lambda}\left[I_1'(\lambda r) + \frac{1}{r} I_1(\lambda r)\right] \\ I_2(\lambda r) &= \frac{1}{\lambda}\left[I_1'(\lambda r) - \frac{1}{r} I_1(\lambda r)\right] \end{aligned} \qquad (6.16)$$

erhalten wir dann nach einigen Rechenoperationen

$$\Theta_1' = \frac{c_1}{2\lambda^2}\left(\frac{r I_1'}{I_1}\right)'$$

woraus unmittelbar

$$\Theta_1(r) = \frac{c_1}{2\lambda^2}\cdot\frac{r I_1'(\lambda r)}{I_1(\lambda r)}$$

folgt. Setzen wir den gewonnenen Ausdruck für $\Theta_1(r)$ in (6.15) ein, gelangen wir zu der Formel

$$\Omega_1(r) = \frac{c_1}{2}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 I_1'(\lambda r) \qquad (6.17)$$

Da wir die für $I_1(\lambda r)$ angestellten Überlegungen ebenfalls auf $K_1(\lambda r)$ anwenden können, erhalten wir für $\chi_1^{(2)}$ gemäß (6.13) unter Berücksichtigung von (6.17)

$$\chi_1^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2\left\{\left[c_1 I_1'(\lambda r) + d_1 K_1'(\lambda r)\right]\left(A_1\cos\lambda z + B_1\sin\lambda z\right)\right\} \qquad (6.18)$$

Unter Berücksichtigung von (6.10) und (6.18) können wir nun die allgemeine Lösung (6.4) der Gleichung (6.3) aufschreiben, nämlich

$$\chi_1 = \left\{ r\left[C_1 I_1(\lambda r) + D_1 K_1(\lambda r)\right] + \right. \tag{6.19}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 \left[c_1 I_1'(\lambda r) + d_1 K_1'(\lambda r)\right]\right\} \left(A_1 \cos\lambda z + B_1 \sin\lambda z\right)$$

b) Wir suchen jetzt die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung aus (6.1)

$$E^2\left[E^2\chi_2 - \gamma^2\chi_2\right] = 0 \tag{6.20}$$

in der Form

$$\chi_2 = \chi_2^{(1)} + \chi_2^{(2)} \tag{6.21}$$

wobei

$$E^2\chi_2^{(1)} - \gamma^2\chi_2^{(1)} = 0$$
$$E^2\chi_2^{(2)} - \gamma^2\chi_2^{(2)} = W_2 \tag{6.22}$$

sind und $W_2 = W_2(r,z)$ der Gleichung

$$E^2 W_2 = 0 \tag{6.23}$$

genügt. Zur Lösung der homogenen Gleichung aus (6.22) machen wir den Ansatz

$$\chi_2^{(1)} = R_2(r)\left(A_2\cos\lambda z + B_2\sin\lambda z\right) \tag{6.24}$$

der für $R_2(r)$ die Differentialgleichung

$$r R_2'' - R_2' - m^2 r R_2 = 0 \tag{6.25}$$

liefert, wobei

$$m^2 = \gamma^2 + \lambda^2 \tag{6.26}$$

ist. Analog zu (6.8) hat die Lösung der Gleichung (6.25) die gleiche Struktur wie (6.9), und wir können gemäß

(6.24) sofort

$$\chi_2^{(1)} = r\left[C_2 I_1(mr) + D_2 K_1(mr)\right]\left(A_2 \cos\lambda z + B_2 \sin\lambda z\right) \tag{6.27}$$

schreiben.
Die Lösung der Gleichung (6.23) finden wir genauso wie in Punkt a), so daß sich W_2 in der Form

$$W_2 = r\left[c_2 I_1(\lambda r) + d_2 K_1(\lambda r)\right]\left(A_2 \cos\lambda z + B_2 \sin\lambda z\right) \tag{6.28}$$

darstellen läßt. Die weiteren Untersuchungen führen wir wieder bezüglich der Besselfunktionen I_1 durch.
Die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung aus (6.22)

$$E^2\chi_2^{(2)} - \gamma^2 \chi_2^{(2)} = W_2$$

suchen wir in der Gestalt

$$\chi_2^{(2)} = \Omega_2(r)\left(A_2 \cos\lambda z + B_2 \sin\lambda z\right) \tag{6.29}$$

Zur Bestimmung von $\Omega_2(r)$ erhalten wir dann die Differentialgleichung

$$r\,\Omega_2'' - \Omega_2' - m^2 r\,\Omega_2 = c_2 r^2 I_1(\lambda r)$$

Wenn wir wieder auf das Verfahren der Veriation der Konstanten zurückgreifen und für Ω_2 den Ansatz

$$\Omega_2(r) = \Theta_2(r)\, r\, I_1(mr) \tag{6.30}$$

machen, so läßt sich $\Theta_2(r)$ aus der Gleichung

$$r\, I_1(mr)\,\Theta_2'' + \left[2\left(r I_1(mr)\right)' - I_1(mr)\right]\Theta_2' = c_2 r\, I_1(\lambda r)$$

bestimmen. Die Integration dieser Beziehung liefert uns [7]

$$\Theta_2' = \frac{c_2}{r\, I_1^2(mr)} \int r\, I_1(\lambda r)\, I_1(mr)\, dr =$$

$$= \frac{c_2}{I_1^2(mr)} \cdot \frac{1}{\lambda^2 - m^2}\left[\lambda\, I_1(mr)\, I_0(\lambda r) - m\, I_0(mr)\, I_1(\lambda r)\right]$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (6.16) ergibt sich hieraus

$$\Theta_2' = -\frac{c_2}{\gamma^2}\left[\frac{I_1(\lambda r)}{I_1(mr)}\right]'$$

woraus

$$\Theta_2 = -\frac{c_2}{\gamma^2}\,\frac{I_1(\lambda r)}{I_1(mr)}$$

folgt. Setzen wir den gewonnenen Ausdruck für Θ_2 in (6.30) ein, so erhalten wir aus (6.29)

$$\chi_2^{(2)} = -\frac{r}{\gamma^2}\left[c_2 I_1(\lambda r) + d_2 K_1(\lambda r)\right]\left(A_2\cos\lambda z + B_2\sin\lambda z\right) \tag{6.31}$$

Die Formel (6.27) liefert zusammen mit (6.31) die allgemeine Lösung (6.21) der Gleichung (6.20), nämlich

$$\chi_2 = \Big\{ r\left[C_2 I_1(mr) + D_2 K_1(mr)\right] - \\ - \frac{r}{\gamma^2}\left[c_2 I_1(\lambda r) + d_2 K_1(\lambda r)\right]\Big\}\left(A_2\cos\lambda z + B_2\sin\lambda z\right) \tag{6.32}$$

wobei $m^2 = \gamma^2 + \lambda^2$ ist.

Die nach (6.19) und (6.32) erhaltenen Formeln für χ_1 und χ_2 stellen die allgemeine Lösung der Gleichungen (1.18) in Zylinderkoordinaten dar. Bei der Behandlung konkreter Strömungsprobleme haben wir es mit Randwertaufgaben zu tun, die in unserem Falle zu Eigenwertproblemen zur Bestimmung der Eigenwerte λ und der dazugehörigen Eigenfunktionen führen. Diese Probleme müssen für jede konkrete Aufgabe gesondert betrachtet werden.

Literatur

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц
Механика сплошных сред,
Москва, Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1953

2. Х.А. Рахматулин
Основы гидродинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред, ПММ, т. XX, вып. 2, 1956

3. J. Happel, H. Brenner
Low Reynolds number hydrodynamics,
Prentice-Hall, 1965

4. H. Bateman, A. Erdélyi
Higher transcendental functions, Volume 1
New York - Toronto - London, Mc Graw-Hill
Book Company, Inc., 1953

5. E. Kamke
Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen
Teil 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig, 1959

6. A. Gray, G. B. Mathews
A treatise on Bessel functions and their applications to physics, New York - London, 1931

7. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик
Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений,
Москва, Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962