ВЕСТНИК
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГОД ИЗДАНИЯ ДВАДЦАТЬ ВТОРОЙ

Журнал выходит 24 раза в год, по четыре номера каждой серии

13

МАТЕМАТИКА □ МЕХАНИКА □ АСТРОНОМИЯ

Выпуск 3

ИЮЛЬ

1967

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 533.6.011.8

Ю. Шлажа

АСИМПТОТИКА МАКРОПАРАМЕТРОВ ГАЗА ПРИ ГИПЕРЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ ОКОЛО НОСКА ПЛАСТИНКИ

Математическое изучение специфических свойств пограничного слоя в разреженном газе сопряжено с характерным явлением асимптотической неравномерности [1]. Исследованию пограничного слоя в случае полубесконечной пластинки посвящено большое количество работ разных авторов. Так как возможности феноменологического исследования пограничного слоя ограничены и уравнения кинетической теории газов вблизи поверхности тела сложны, то много проблем еще не решено, особенно проблемы, относящиеся к формированию пограничного слоя у носка пластинки, где возникают продольные градиенты.

В настоящей работе на основе метода из [2] в первом приближении исследована структура неравномерной асимптотики макропараметров газа вблизи поверхности и передней кромки пластинки при больших числах Маха.

§ 1. Первое приближение для макропараметров газа

Рассмотрим гиперзвуковое продольное обтекание бесконечно тонкой пластинки $y=0$, $x\geqslant 0$ (рис. 1) одноатомным разреженным газом, средняя безразмерная скорость которого равна $\bar{U}_0=\{1, 0, 0\}$.

Допустим, что молекулы являются гладкими упругими шарами, их отражение от стенки диффузное и температура поверхности не отличается от температуры газа. Найдем асимптотические выражения для макропараметров газа при $M\to\infty$.

Обтекание тела разреженным одноатомным газом можно описывать системой кинетических уравнений С. В. Валландера [1], которая в стационарном случае имеет вид

$$f(\bar{r},\ \bar{u})=\begin{cases} f^{+}=\dfrac{1}{u_n}\,\widetilde{\Phi}\,(\bar{r}_s,\ \bar{u})\,\Pi\,(\bar{r},\ \bar{u},\ \tau_s)+\displaystyle\int_0^{\tau_s}\Phi\,(\bar{r}-\tau\bar{u},\ \bar{u})\,\Pi(\bar{r},\ \bar{u},\ \tau)\,d\tau; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \bar{u}\in\Omega^{+}(\bar{r}) \\ f^{-}=\displaystyle\int_0^{\infty}\Phi\,(\bar{r}-\tau\bar{u},\ \bar{u})\,\Pi\,(\bar{r},\ \bar{u},\ \tau)\,d\tau;\quad \bar{u}\in\Omega^{-}(\bar{r}), \end{cases} \tag{1,1}$$

где $\Omega^{+}(\bar{r})$ — конус в пространстве скоростей, содержащий все скорости $\bar{u}$, с которыми молекулы могут прийти с тела в точку $\bar{r}$ без столкновений; $\Omega^{-}(\bar{r})$ — оставшаяся часть пространства скоростей.

В дальнейшем все величины безразмерны и отмеченные индексом „+“ относятся к части пространства скоростей Ω^+, а индексом „−“ к части Ω^-. Введем обозначение

$$\{B\}^{\pm} = B^{+} + B^{-}, \tag{1,2}$$

где B может быть скаляром, вектором или тензором. Для функций, которые входят в правые части (1,1), имеем следующие выражения [1]:

$$\widetilde{\Phi}(\bar{r}_s, \bar{u}) = N(\bar{r}_s)\,\widetilde{T}(\bar{u}), \tag{1,3}$$

где

$$N(\bar{r}_s) = -\iiint\limits_{u_n<0} f(\bar{r}_s, \bar{u})\, u_n d\bar{u} \tag{1,4}$$

и $\widetilde{T}(\bar{u})$ при диффузном отражении имеет вид

$$\widetilde{T} = \frac{2h^2}{\pi} u_n e^{-hu^2}. \tag{1,5}$$

Далее:

$$\Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau) = \exp\left\{-\int_0^{\tau} Q(\bar{r} - q\bar{u}, \bar{u})\, dq\right\}, \tag{1,6}$$

где

$$Q(\bar{r}, \bar{u}) = \{Q(\bar{r}, \bar{u})\}^{\pm} \tag{1,7}$$

и

$$Q^{\pm}(\bar{r}, \bar{u}) = \iiint\limits_{\Omega^{\pm}(\bar{r})} |\bar{u} - \bar{u}_1|\, f^{\pm}(\bar{r}, \bar{u}_1)\, d\bar{u}_1. \tag{1,8}$$

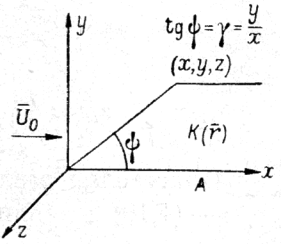

Рис. 1.

A — пластинка $y = 0$, $x > 0$; $K(\bar{r})$ — конус с вершиной в точке (x, y, z), под которым видна полубесконечная пластинка.

Аналогично,

$$\Phi(\bar{r}, \bar{u}) = \Phi^{++}(\bar{r}, \bar{u}) + 2\Phi^{+-}(\bar{r}, \bar{u}) + \Phi^{--}(\bar{r}, \bar{u}), \tag{1,9}$$

где

$$\Phi^{\varepsilon\Delta}(\bar{r}, \bar{u}) = \iiint\limits_{\Omega^{\varepsilon}} \iiint\limits_{\Omega^{\Delta}} |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|\, f^{\varepsilon}(\bar{r}, \bar{u}_1) f^{\Delta}(\bar{r}, \bar{u}_2)\, T(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u})\, d\bar{u}_1 d\bar{u}_2 \tag{1,10}$$

и для гладких упругих шарообразных молекул

$$T(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}) = \frac{1}{\pi |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|^2}\, \delta\left\{\left|\bar{u} - \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2}\right| - \frac{|\bar{u}_2 - \bar{u}_1|}{2}\right\}, \tag{1,11}$$

ε и Δ могут быть как „+“ так и „−“. В (1,9) Φ^{++} характеризует взаимодействие между собой отраженных молекул, Φ^{--} — взаимодействие между собой падающих молекул, а Φ^{+-} — взаимодействие между отраженными и падающими молекулами.

Следуя методу из [2], функцию распределения можно представить в виде

$$f^{\pm}(\bar{r}, \bar{u}) = f_0(\bar{u}) \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{\pm}(\bar{r})\, \psi_m^{\pm}(\bar{r}, \bar{u}), \tag{1,12}$$

где

$$f_0 = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h(\bar{u}-\bar{U}_0)^2}, \quad h = \frac{5}{6} M^2, \tag{1,13}$$

f_0 — максвелловская функция распределения; $\psi_m^{\pm}$ — полиномы, ортогональные в $\Omega^{\pm}$ с весом f_0, и $a_m^{\pm}$ — коэффициенты разложения. Полиномы $\psi_m^{\pm}$ можно строить по следующей схеме [2]:

$$\psi_m^{\pm} = \sigma_m^{\pm} \varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^{\pm} \varphi_k, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1,14}$$

где $\{\varphi_m\}$ — последовательность линейно независимых тензоров $\{u_{i_1}u_{i_2}\ \dots\ u_{i_m}\}_{i_1\leqslant i_2\leqslant\dots\leqslant i_m}$, $(i_m=1,\ 2,\ 3;\ m=0,\ 1,\ 2,\ \dots;\ u_{i_m}$ — компоненты вектора скорости молекул $\bar{u}$ и индексы 1, 2, 3 соответствуют индексам x, y, z) m-го ранга третьего порядка и

$$\sigma_m^{\pm}=\frac{1}{\|\theta_m\|^{\pm}},\quad \delta_{mk}^{\pm}=\sigma_m^{\pm}b_{mk}^{\pm}, \tag{1,15}$$

$$b_{mk}^{\pm}=\frac{1}{\alpha_{00}^{\pm}}\left\{d_{mk}^{\pm}-\sum_{\substack{i=1\\ i>k}}^{m-1}b_{ik}^{\pm}d_{mi}^{\pm}\right\}, \tag{1,16}$$

$$d_{mk}^{\pm}=\frac{1}{\|\theta_k\|^{\pm 2}}\left\{\alpha_{mk}^{\pm}-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_{mi}^{\pm}b_{ki}^{\pm}\right\}, \tag{1,17}$$

$$\|\theta_m\|^{\pm 2}=\frac{1}{\alpha_{00}^{\pm}}\left\{\alpha_{mm}^{\pm}-2\sum_{k=0}^{m-1}b_{mk}^{\pm}\alpha_{mk}^{\pm}-\sum_{i,\ k=0}^{m-1}b_{mi}^{\pm}b_{mk}^{\pm}\alpha_{ik}^{\pm}\right\}, \tag{1,18}$$

$$\alpha_{ij}^{\pm}=\iiint\limits_{\Omega^{\pm}}f_0\varphi_i\varphi_j d\bar{u},\quad i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \dots;\ \alpha_{ij}^{\pm}=\alpha_{ji}^{\pm}. \tag{1,19}$$

Подставляя разложение функции распределения (1,12) в формулы (1,3) — (1,10) и принимая во внимание (1,14), получим для N, $Q^{\pm}$ и $\Phi^{\varepsilon\Delta}$

$$N(\bar{r}_s)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{-}(\bar{r}_s)\,\tilde{\beta}_m^{-}(\bar{r}_s), \tag{1,20}$$

здесь

$$\tilde{\beta}_m^{-}(\bar{r}_s)=\sigma_m^{-}(\bar{r}_s)\,\beta_m^{-}-\sum_{k=0}^{m-1}\delta_{mk}^{-}(\bar{r}_s)\,\beta_k^{-}, \tag{1,21}$$

$$\beta_m^{-}=-\iiint\limits_{u_n<0}u_n f_0\varphi_m d\bar{u},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \dots; \tag{1,22}$$

$$Q^{\pm}(\bar{r},\ \bar{u})=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{\pm}(\bar{r})\,\tilde{A}_m^{\pm}(\bar{r},\ \bar{u}), \tag{1,23}$$

где

$$\tilde{A}_m^{\pm}(\bar{r},\ \bar{u})=\sigma_m^{\pm}(\bar{r})\,A_m^{\pm}(\bar{r},\ \bar{u})-\sum_{k=0}^{m-1}\delta_{mk}^{\pm}(\bar{r})\,A_k^{\pm}(\bar{r},\ \bar{u}), \tag{1,24}$$

$$A_m^{\pm}(\bar{r},\ \bar{u})=\iiint\limits_{\Omega^{\pm}}|\bar{u}-\bar{u}_1|\,\varphi_m(\bar{u}_1)\,f_0(\bar{u}_1)\,d\bar{u}_1; \tag{1,25}$$

$$\Phi^{\varepsilon\Delta}(\bar{r},\ \bar{u})=\sum_{i,\ j=0}^{\infty}a_i^{\varepsilon}(\bar{r})\,a_j^{\Delta}(\bar{r})\,\tilde{B}_{ij}^{\varepsilon\Delta}(\bar{r},\ \bar{u}), \tag{1,26}$$

где

$$\tilde{B}_{ij}^{\varepsilon\Delta}=\sigma_i^{\varepsilon}\sigma_j^{\Delta}B_{ij}^{\varepsilon\Delta}-\sigma_i^{\varepsilon}\sum_{k=0}^{j-1}\delta_{jk}^{\Delta}B_{ik}^{\varepsilon\Delta}-\sigma_j^{\Delta}\sum_{k=0}^{i-1}\delta_{ik}^{\varepsilon}B_{jk}^{\varepsilon\Delta}+\sum_{l=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1}\delta_{il}^{\varepsilon}\delta_{jk}^{\Delta}B_{lk}^{\varepsilon\Delta}, \tag{1,27}$$

$$B_{ij}^{\varepsilon\Delta}(\bar{r},\ \bar{u})=\iiint\limits_{\Omega^{\varepsilon}}\iiint\limits_{\Omega^{\Delta}}\varphi_i(\bar{u}_1)\,\varphi_j(\bar{u}_2)\,|\bar{u}_1-\bar{u}_2|\,f_0(\bar{u}_1)\,f_0(\bar{u}_2)\times$$

$$\times\,T(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u})\,d\bar{u}_1 d\bar{u}_2. \tag{1,28}$$

Как видно из (1,15) — (1,19), можно выразить $\delta_{mk}^{\pm}$ в формулах (1,21), (1,24) и (1,27) через интегралы $\alpha_{ij}^{\pm}$. Далее при $h\to\infty$ можно асимптотически исследовать интегралы $\alpha_{ij}^{\pm}$, β_m^{-}, $A_m^{\pm}$, $B_{ij}^{\varepsilon\Delta}$ из (1,19),

(1,22), (1,25) и (1,28), так как в подынтегральную функцию входит максвелловская функция распределения f_0. Трехкратные интегралы $\alpha_{ij}^{\pm}$, β_m^{-}, $A_m^{\pm}$ оцениваются сравнительно легко. При асимптотическом исследовании шестикратных интегралов $B_{ij}^{\varepsilon\Delta}$ возникают некоторые трудности, связанные с δ-функцией, входящей через $T(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u})$ в подынтегральную функцию. Одна квадратура в интегралах $B_{ij}^{\varepsilon\Delta}$ отпадает из-за δ-функции, но дальнейшее интегрирование по пятиразмерной гиперповерхности приводит к трудностям, порождаемым формой обтекаемого тела. Подставляя теперь в (1,1) разложение (1,12), умножая соответственно на ψ_m^{+} и ψ_m^{-} и производя интегрирование по Ω^{+} и Ω^{-}, придем, ввиду ортонормированных полиномов $\psi_m^{\pm}$, к бесконечной системе интегральных моментных уравнений

$$a_m^{\pm} = \iiint\limits_{\Omega^{\pm}} \psi_m^{\pm} V^{\pm} f^{\pm} d\bar{u}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1,29}$$

Здесь $V^{\pm}f^{\pm}$ — правые части в (1,1). Введем следующие обозначения

$$M_i^{\pm} = \iiint\limits_{\Omega^{\pm}} \varphi_i f^{\pm} d\bar{u}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1,30}$$

Умножая разложение (1,12) на (1,14) и интегрируя по Ω^{+} и Ω^{-}, получим следующие соотношения:

$$M_m^{\pm} = \frac{1}{\sigma_m^{\pm}} \left[a_m^{\pm} + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^{\pm} M_k^{\pm} \right], \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1,31}$$

Выражая в этой формуле последовательно $M_m^{\pm}$ через $a_m^{\pm}$ и принимая во внимание (1,16) и (1,17), перепишем (1,31) в виде

$$M_i^{\pm} = \sum_{k=0}^{i} c_{ik}^{\pm} a_k^{\pm}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1,32}$$

где

$$c_{ik}^{\pm} = \begin{cases} \dfrac{\|\theta_k\|^{\pm}}{\alpha_{00}^{\pm}} d_{ik}^{\pm} & \text{при} \quad k \neq i, \\ \dfrac{1}{\sigma_i^{\pm}} & \text{при} \quad k = i. \end{cases}$$

Принимая во внимание (1,2) и (1,30), можно выразить плотность, среднюю скорость и температуру газа через $M_i^{\pm}$, а именно [2]

$$n = \{M_0\}^{\pm}, \tag{1,33}$$

$$n\bar{U} = \{\bar{U}^*\}^{\pm}, \tag{1,34}$$

где

$$\{U_x^*\}^{\pm} = \{M_1\}^{\pm}, \quad \{U_y^*\}^{\pm} = \{M_2\}^{\pm}, \quad \{U_z^*\}^{\pm} = \{M_3\}^{\pm}, \tag{1,35}$$

$$\frac{3nT}{2h} = \{M_4 + M_5 + M_6\}^{\pm} - nU^2. \tag{1,36}$$

Из (1,32) — (1,36) следует, что параметры газа будут найдены, если известны $a_m^{\pm}$. Рассмотрим поэтому систему интегральных уравнений (1,29). Для этой системы можно провести метод итераций для определения $a_m^{(n)\pm}$ по следующей схеме:

$$a_m^{(n)\pm} = \iiint\limits_{\Omega^{\pm}} \psi_m^{\pm} V^{-} f_{n-1}^{\pm} d\bar{u}, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1,37}$$

где n — номер приближения.

В качестве нулевого приближения для f возьмем максвелловскую функцию распределения f_0, которая характеризует течение невозмущенного набегающего потока. Это означает, что коэффициенты $a_m^{\pm}$ в нулевом приближении имеют вид

$$a_0^{(0)-} = 1, \quad a_0^{(0)+} = 0, \quad a_k^{(0)\pm} = 0, \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1,38}$$

Подставляя эти выражения для $a_m^{\pm}$ в (1,20)—(1,28), получим для N, Q и Φ в нулевом приближении

$$N^{(0)} = \beta_0^{-}, \quad Q^{(0)} = A_0^{-}, \quad \Phi^{(0)} = B_{00}^{-}, \tag{1,39}$$

где β_0^{-}, A_0^{-} и B_{00}^{-} могут быть вычислены по (1,22), (1,25) и (1,28). $\Phi^{(0)}$ можно найти иначе. Для невозмущенного внешнего потока в силу равновесности выражений (1,38) и (1,39) имеет место формула [1]

$$\Phi^{(0)} = Q^{(0)-} f_0 = Q^{(0)} f_0 = A_0^{-} f_0. \tag{1,40}$$

Отсюда видно, что для определения $N^{(0)}$, $Q^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$ нужно вычислить только трехкратные интегралы β_0^{-} и A_0^{-}.

Для a_m^{+} в первом приближении имеем

$$a_m^{(1)\pm} = \iiint\limits_{\Omega^{\pm}} \psi_m^{\pm} V^{\pm} f_0^{\pm} d\bar{u}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1,41}$$

Подставляя (1,39) и (1,40) в (1,1) и принимая во внимание (1,3)—(1,6), получим для $V^{\pm} f_0^{\pm}$:

$$V^{-} f_0^{-} = f_0 J_1(\bar{r}, \bar{u}), \tag{1,42}$$

$$V^{+} f_0^{+} = f_0^{*} \Pi_0(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) + f_0 J_2(\bar{r}, \bar{u}), \tag{1,43}$$

где

$$J_k(\bar{r}, \bar{u}) = \int\limits_0^{\tau_k} A_0^{-}(\bar{r} - \tau\bar{u}, \bar{u}) \exp\left\{ -\int\limits_0^{\tau} A_0^{-}(\bar{r} - q\bar{u}, \bar{u})\, dq \right\} d\tau, \tag{1,44}$$

$$k = 1, 2; \quad \tau_1 = \infty, \quad \tau_2 = \tau_s,$$

$$f_0^{*} = \frac{1}{u_n} \beta_0^{-} \widetilde{T}(\bar{u}), \tag{1,45}$$

$$\Pi_0(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) = \exp\left\{ -\int\limits_0^{\tau_s} A_0^{-}(\bar{r} - q\bar{u}, \bar{u})\, dq \right\}. \tag{1,46}$$

Интегралы (1,44) легко вычисляются

$$J_k(\bar{r}, \bar{u}) = 1 - e^{-z_k(\bar{r}, \bar{u})}, \quad k = 1, 2, \tag{1,47}$$

где $z_1 = \infty$ и $z_2 = \int\limits_0^{\tau_s} A_0^{-}(\bar{r} - q\bar{u}, \bar{u})\, dq$.

Подставляя (1,47) в (1,42) и (1,43), будем иметь

$$V^{-} f_0^{-} = f_0, \tag{1,48}$$

$$V^{+} f_0^{+} = f_0 + \Pi_0(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s)\left[f_0^{*} - f_0\right]. \tag{1,49}$$

Подставляя теперь (1,48) и (1,49) в (1,41) и принимая во внимание (1,14)—(1,19), получим для $a_m^{(1)\pm}$ следующие выражения:

$$a_0^{(1)-} = \alpha_{00}^{-}, \quad a_k^{(1)-} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1,50}$$

$$a_m^{(1)+} = \bar{a}_m^{(1)+} + \tilde{a}_m^{(1)+}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1,51}$$

где

$$\bar{a}_m^{(1)+} = \iiint\limits_{\Omega^+} \psi_m^+ f_0^* \Pi_0(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s)\, d\bar{u}, \tag{1,52}$$

$$\tilde{a}_0^{(1)+} = \alpha_{00}^+ + \gamma_0^+, \quad \tilde{a}_k^{(1)+} = \gamma_k^+, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1,53}$$

$$\gamma_m^+ = -\iiint\limits_{\Omega^+} \psi_m^+ f_0 \Pi_0(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s)\, d\bar{u}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1,54}$$

С помощью коэффициентов $a_m^{(1)\pm}$ можно теперь найти выражения для макропараметров газа в первом приближении. Как видно из (1,33) — (1,36), все макропараметры газа выражаются через $\{M_i\}^\pm$. Подставляя (1,50) — (1,54) в (1,32) и принимая во внимание (1,14) и (1,17), можно $\{M_i^{(1)}\}^\pm$ записать в виде

$$\{M_i^{(1)}\}^\pm = \{\alpha_{i0}\}^\pm + \gamma_i^+ + \eta_i^+, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1,55}$$

где

$$\alpha_{i0}^\pm = \iiint\limits_{\Omega^\pm} f_0 \varphi_i d\bar{u}, \tag{1,56}$$

$$\gamma_i^+ = -\iiint\limits_{\Omega^+} \varphi_i f_0 \Pi_0(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s)\, d\bar{u}, \tag{1,57}$$

$$\eta_i^+ = \iiint\limits_{\Omega^+} \varphi_i f_0^* \Pi_0(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s)\, d\bar{u}. \tag{1,58}$$

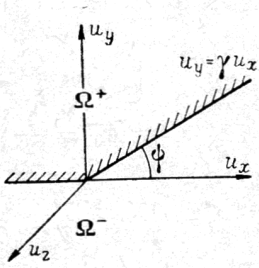

Рис. 2.

Следовательно, макропараметры газа будут окончательно вычислены, если будут найдены значения интегралов (1,56) — (1,58). Все эти интегралы можно асимптотически оценить, если $h \to \infty$.

Вернемся теперь к нашей задаче о гиперзвуковом обтекании полубесконечной пластинки. В рассматриваемом случае исходим из уравнений (1,1), где $u_n = u_y$ и $\tau_s = \frac{y}{u_y}$. Функция распределения f терпит разрыв на некоторой конической поверхности (рис. 2), которая делит пространство скоростей на две части Ω^+ и Ω^-. Поэтому функцию распределения можно представить в виде разложения (1,12), а макропараметры газа выразить через $\{M_i\}^\pm$, для которых в первом приближении имеем формулу (1,55), причем

$$\alpha_{i0}^+ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i f_0 d\bar{u}, \tag{1,59}$$

$$\alpha_{i0}^- = \alpha_{i0}^{-*} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\gamma u_x} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi_i f_0 d\bar{u}, \tag{1,60}$$

$$\gamma_i^+ = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i f_0 \Pi_0(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s)\, d\bar{u}, \tag{1,61}$$

$$\eta_i^+ = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i f_0^* \Pi_0(\bar{r},\ \bar{u},\ \tau_s)\, d\bar{u}, \tag{1,62}$$

где

$$\alpha_{00}^{-*} = \alpha_{10}^{-*} = \frac{1}{2},\ \alpha_{20}^{-*} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi h}},\ \alpha_{30}^{-*} = 0, \tag{1,63}$$

$$\alpha_{40}^{-*} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2h}\right),\ \alpha_{50}^{-*} = \alpha_{60}^{-*} = \frac{1}{4h}$$

и по (1,45) и (1,46)

$$f_0^* = \frac{2h^2}{\pi}\beta_0^- e^{-hu^2}, \tag{1,64}$$

$$\Pi_0(\bar{r},\ \bar{u},\ \tau_s) = \exp\left\{-\int\limits_0^{\frac{y}{u_y}} A_0^-(\bar{r} - q\bar{u},\ \bar{u})\, dq\right\}, \tag{1,65}$$

β_0^- и A_0^- вычисляются по (1,22) и (1,25), т. е.

$$\beta_0^- = -\int\limits_{u_y<0}\int\int\int u_y f_0 d\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}}, \tag{1,66}$$

$$A_0^- = \frac{1}{2}|\bar{u} - \bar{U}_0| + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\gamma u_x}\int\limits_{0}^{\infty} f_0(\bar{u}_1)|\bar{u} - \bar{u}_1|\, d\bar{u}_1 \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}|\bar{u} - \bar{U}_0|\,(1 + \operatorname{erf}\sqrt{h}\gamma). \tag{1,67}$$

A_0^- оценивалось по методу Лапласа при $h \to \infty$. Подставляя (1,66) и (1,67) в (1,64) и (1,65), получим

$$f_0^* = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hu^2}, \tag{1,68}$$

$$\Pi_0(\bar{r},\ \bar{u},\ \tau_s) = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\bar{u} - \bar{U}_0|\left[\frac{y}{u_y} + \int\limits_0^{\frac{y}{u_y}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{h}\,\frac{y - qu_y}{x - qu_x}\right) dq\right]\right\}. \tag{1,69}$$

Переходя в интеграле в (1,69) от интегрирования по q к интегрированию по $t = \dfrac{y - qu_y}{x - qu_x}$, интегрируя потом по частям и оценивая полученный интеграл по методу Лапласа при $h \to \infty$, получим для Π_0

$$\Pi_0(\bar{r},\ \bar{u},\ \tau_s) \approx e^{-A_0^- \frac{y}{u_y}}. \tag{1,70}$$

Принимая во внимание (1,13), (1,67), (1,68) и (1,70), запишем интегралы (1,59) — (1,62) в виде:

$$\alpha_{i0}^+ = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2} d\bar{u}, \tag{1,71}$$

$$\alpha_{i0}^- = \alpha_{i0}^{-*} + \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\gamma u_x}\int\limits_{0}^{\infty} \varphi_i e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2} d\bar{u}, \tag{1,72}$$

$$\gamma_i^+ = -\left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i e^{-h(\bar{u}-\bar{U}_0)^2} \exp \times$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{2} |\bar{u} - \bar{U}_0| \frac{y}{u_y} (1 + \operatorname{erf} \sqrt{h}\gamma) \right\} d\bar{u}, \qquad (1,73)$$

$$\eta_i^+ = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i e^{-hu^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\bar{u} - \bar{U}_0| \frac{y}{u_y} (1 + \operatorname{erf} \sqrt{h}\gamma) \right\} d\bar{u}, \qquad (1,74)$$

где α_{i0}^{-*} определяются по (1,63).

Займемся теперь вычислением трех основных макропараметров газа $n^{(1)}$, $\bar{U}^{(1)}$, $T^{(1)}$ в первом приближении, т. е. вычислим интегралы (1,71) — (1,74) для $i = 0, 1, \ldots, 6$.

§ 2. Асимптотика $\alpha_{i0}^{\pm}$ и γ_i^+ $(i = 0, 1, \ldots, 6)$

Асимптотическая оценка интегралов $\alpha_{i0}^{\pm}$ проводилась в [2] и мы здесь сразу выпишем полученные там результаты. Для α_{i0}^- имеем

$$\alpha_{00}^- \approx \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf} \sqrt{h}\gamma), \quad \alpha_{10}^- \approx \alpha_{00}^-, \quad \alpha_{20}^- \approx -\frac{e^{-h\gamma^2}}{2\sqrt{\pi h}} = \alpha_0^-, \qquad (2,1)$$

$$\alpha_{30}^- = 0, \quad \alpha_{40}^- \approx \alpha_{00}^- \left(1 + \frac{1}{2h}\right), \quad \alpha_{50}^- \approx \gamma\alpha_{20}^- + \frac{\alpha_{00}^-}{2h}, \quad \alpha_{60}^- = \frac{\alpha_{00}^-}{2h}.$$

Далее

$$\alpha_{00}^+ \approx \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf} \sqrt{hs}), \quad s = \sin\psi = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}},$$

$$\alpha_{10}^+ \approx \alpha_{00}^+ - \alpha_0^+ s, \quad \alpha_0^+ = \frac{e^{-hs^2}}{2\sqrt{\pi h}},$$

$$\alpha_{20}^+ \approx \alpha_0^+ \cos\psi,$$

$$\alpha_{30}^+ = 0,$$

$$\alpha_{40}^+ \approx \alpha_{10}^+ - s\alpha_{20}^+ \cos\psi + \frac{\alpha_{00}^+}{2h}, \qquad (2,2)$$

$$\alpha_{50}^+ \approx s\alpha_{20}^+ \cos\psi + \frac{\alpha_{00}^+}{2h},$$

$$\alpha_{60}^+ = \frac{\alpha_{00}^+}{2h}.$$

Эти формулы верны для $\gamma \geqslant 0$. Из (2,1) и (2,2) видно, что все $\alpha_{i0}^{\pm}$ могут быть выражены через $\alpha_0^{\pm}$ и $\alpha_{00}^{\pm}$. Слагаемые в формулах для $\alpha_{i0}^{\pm}$ играют не одинаковую роль. Так, например, первое слагаемое в формуле для $\alpha_{50}^{\pm}$ является главным при $\sqrt{hs} \to \infty$, а второе слагаемое становится главным, когда $\sqrt{hs} \to 0$. Этот факт говорит о том, что мы имеем дело с неравномерным асимптотическим поведением $\alpha_{i0}^{\pm}$ вблизи пластинки. Когда $\gamma \to 0$, формулы (2,1) и (2,2) переходят в формулы для $\alpha_{i0}^{\pm *}$, которые были получены для случая обтекания бесконечной пластинки [3].

Найдем теперь выражения для γ_i^+. По (1,73) и принимая во внимание (2,1), имеем

$$\gamma_i^+ = -\left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i e^{-h(\bar{u}-\bar{U}_0)^2} \exp\left\{-\frac{y\alpha_{00}^-}{u_y}|\bar{u}-\bar{U}_0|\right\} du. \quad (2,3)$$

При оценке интегралов по u_z по методу Лапласа при $h \to \infty$, мы получим следующие соотношения:

$$\gamma_3^+ = 0, \quad \gamma_6^+ \approx \frac{\gamma_0^+}{2h},$$

$$\gamma_i^+ = -\frac{h}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i(u_x, u_y) e^{-h\left[(u_x-1)^2+u_y^2\right]} \exp \times$$

$$\times \left\{-\frac{y\alpha_{00}^-}{u_y}\sqrt{(u_x-1)^2+u_y^2}\right\} du_x du_y, \quad (2,4)$$

$$i = 0, 1, 2, 4, 5.$$

После замены переменных интегрирования u_x, u_y на ξ, η по формулам

$$u_x = 1 + \xi\cos\psi - \eta\sin\psi,$$
$$u_y = \xi\sin\psi + \eta\cos\psi \quad (2,5)$$

для γ_i^+ получим (см. рис. 3)

$$\gamma_i^+ = -\frac{h}{\pi} \int_{s}^{\infty} \int_{-\frac{\eta}{\gamma}}^{\infty} \varphi_i(\xi, \eta) e^{-h(\xi^2+\eta^2)} \exp\left\{-y\alpha_{00}^- \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi\sin\psi+\eta\cos\psi}\right\} d\xi d\eta. \quad (2,6)$$

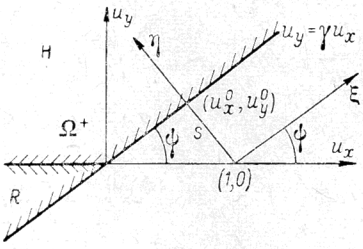

Рис. 3.

Отсюда видно, что точкой, в которой подынтегральная функция принимает максимальное значение, является точка $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = s$. Поэтому, исследуя интегралы в окрестности точки (ξ_0, η_0) по методу Лапласа при $h \to \infty$, получим

$$\gamma_i^+ \approx \alpha_{i0}^+ F(\bar{r}, h), \quad (2,7)$$

где

$$F(\bar{r}, h) = -e^{-\frac{y\alpha_{00}^-}{\cos\psi}} = -e^{-y\alpha_{00}^-\sqrt{1+\gamma^2}}. \quad (2,8)$$

Когда $\gamma \to 0$, формулы (2,7) переходят в выражения для $-\alpha_{i0}^{+*}$, полученные в [3]. Если ввести обозначения

$$n_s = \gamma_0^+, \quad n_s U_{sx} = \gamma_1^+, \quad n_s U_{sy} = \gamma_2^+, \quad (2,9)$$
$$n_s T_s = n_s(T_{sx} + T_{sy} + T_{sz}) = \gamma_4^+ + \gamma_5^+ + \gamma_6^+$$

и принять во внимание (1,33) — (1,36), (1,55), (2,1), (2,2) и (2,7), для макропараметров газа в первом приближении получим следующие асимптотические формулы:

$$n^{(1)} \approx \alpha_{00}^- + \alpha_{00}^+(1+F) + n_s,$$

$$U_x^{(1)} \approx 1 + \frac{1}{n^{(1)}}\left\{n_s(U_{sx}-1) - \frac{\alpha_0^+\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}(1+F)\right\},$$

$$U_y^{(1)} \approx \frac{1}{n^{(1)}}\left\{\alpha_0^- + \frac{\alpha_0^+}{\sqrt{1+\gamma^2}}(1+F) + n_s U_{sy}\right\}, \tag{2,10}$$

$$T^{(1)} \approx \frac{2h}{3n^{(1)}}\left\{\alpha_{00}^-\left(1+\frac{3}{2h}\right) + \gamma\alpha_0^- + (1+F)\left[\alpha_{00}^+\left(1+\frac{3}{2h}\right) - \frac{\alpha_0^+\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right] + \right.$$

$$\left. + n_s T_s - n^{(1)}U^{(1)^2}\right\}.$$

Окончательно параметры газа вычисляются по этим формулам, если найдены n_s, U_{sx}, U_{sy}, T_s. В следующем параграфе займемся определением этих величин.

§ 3. Асимптотическое поведение функций n_s, U_{sx}, U_{sy}, T_s при $h \to \infty$

Исследуем теперь асимптотику n_s, U_{sx}, U_{sy}, T_s при $h \to \infty$, $y \geqslant 0$. По (2,9), (1,74) и (2,1) имеем для плотности потока частиц, рожденных на стенке, следующее выражение:

$$n_s(x, y, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \exp\left\{-hu^2 - |\bar{u} - \bar{U_0}|\frac{y}{u_y}\alpha_{00}^-\right\} d\bar{u}. \tag{3,1}$$

После оценки интегралов по u_x и u_z по методу Лапласа при $h \to \infty$ получим

$$n_s \approx \frac{1}{2}n_s^* + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{\pi}}\int_0^\infty \exp\left\{-hu_y^2 - \frac{y}{u_y}\sqrt{1+u_y^2}\,\alpha_{00}^-\right\}\operatorname{erf}\left(\sqrt{h}\frac{u_y}{\gamma}\right) du_y. \tag{3,2}$$

Заменяя переменную интегрирования на $t = \sqrt{h}\,u_y$, мы легко раскроем неравномерность асимптотики интеграла (3,2) при $y \to 0$. Имеем:

$$n_s \approx \frac{1}{2}\left(n_s^* + \tilde{n}_s\right), \tag{3,3}$$

где

$$\tilde{n}_s = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}}\operatorname{erf}\left(\frac{t}{\gamma}\right) dt, \tag{3,4}$$

$$\alpha = \sqrt{h}\,y\alpha_{00}^-, \tag{3,5}$$

а n_s^* и все в дальнейшем обозначенные через „ * “ величины получены для случая обтекания бесконечной пластинки в [4], с (3,5) вместо α.

n_s является функцией двух параметров α и γ. Дальнейшее асимптотическое исследование проводится по параметру α, который при больших h может принимать любые неотрицательные значения. Асимптотика проводится при больших и малых α [5], [6]. При $\alpha \to \infty$ делается замена переменных $t = \alpha^{\frac{1}{3}}\xi$ и интеграл оценивается потом по методу Лапласа при $\alpha \to \infty$. Когда $\alpha \to 0$, для вычисления $\tilde{n}_s$ применяется преобразование Лапласа к интегралу (3,4). Если же $y = o(M^{-1})$, то $\tilde{n}_s$ надо вычислять численно.

После асимптотического исследования интеграла (3,4), и принимая во внимание формулы для n_s^* [4], получим для n_s

$$n_s \approx \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}} \left\{1 + \operatorname{erf}\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}\left[1 + o\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)\right], & \alpha \to \infty, \\ \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\gamma}\right) + o(\alpha \ln \alpha), & \alpha \to 0. \end{cases} \tag{3,6}$$

Если в (3,6) $\gamma \to 0$, то эти формулы переходят в асимптотические выражения для n_s^* [4].

Если принять во внимание (2,9) и затем оценить в (1,74) интегралы по u_x и u_z по методу Лапласа и сделать потом замену переменных $t = \sqrt{h}\, u_y$, то для остальных макропараметров газа будем иметь

$$n_s U_{sx} \approx n_s^* U_{sx}^* - \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi h}\sqrt{1+\gamma^2}} n_s^*(\beta), \tag{3,7}$$

$$n_s U_{sy} \approx \frac{1}{2}\left(n_s^* U_{sy}^* + \tilde{n}_s \tilde{U}_{sy}\right), \tag{3,8}$$

$$n_s T_s \approx \frac{1}{2}\left(n_s^* T_s^* + \tilde{n}_s \tilde{T}_s\right) - \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi h}\,(1+\gamma^2)} n_s^*(\beta)\, U_{sy}^*(\beta), \tag{3,9}$$

где

$$\tilde{n}_s \tilde{U}_{sy} = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \int_0^\infty t e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\gamma}\right) dt, \tag{3,10}$$

$$\tilde{n}_s \tilde{T}_s = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (1+t^2) e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\gamma}\right) dt, \tag{3,11}$$

$$n_s^*(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2 - \frac{\beta}{t}} dt, \tag{3,12}$$

$$n_s^*(\beta)\, U_{sy}^*(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \int_0^\infty t e^{-t^2 - \frac{\beta}{t}} dt, \tag{3,13}$$

$$\beta = \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{h}\, \rho \alpha_{00}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3,14}$$

Из (3,7) и (3,9) видно, что $n_s U_{sx}$ и $n_s T_s$ зависят от трех параметров α, γ и β, причем β по (3,14) является комбинацией α и γ. Ввиду неравномерности асимптотики при $y \to 0$ и $\rho \to 0$, все интегралы можно, как и в [6], асимптотически исследовать для больших и малых α и β. При этом ввиду (3,5) и (3,14) будем иметь три области асимптотики, а именно: 1) $\alpha \to \infty$ и $\beta \to \infty$, 2) $\alpha \to 0$ и $\beta \to \infty$, 3) $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$. Последняя область означает окрестность носка пластинки. В ней функции от β дают вклад в главный член асимптотики. Во второй области (т. е. в пограничном слое, под которым понимаем бесконечно тонкий слой, исчезающий вместе с характеризующим его параметром α) остаются функции от α, а функции от β исчезают, так как они стремятся экспоненциально к нулю при $\beta \to \infty$. В первой области функции от α и выражения, зависящие от β, имеют одинаковый порядок.

Оценивая (3,7)—(3,9) по методам, изложенным в [4] и [6], получим

$$n_s U_{sx} \approx$$

$$\approx \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3h}}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}}\left[1+o\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)\right]-\dfrac{\gamma}{2\sqrt{3\pi h}\sqrt{1+\gamma^2}} e^{-3\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2/3}} \times \\ \quad \times\left[1+o\left(\beta^{-\frac{2}{3}}\right)\right],\ \alpha\to\infty,\ \beta\to\infty; \\ -\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\pi h}}\left\{\ln\alpha+\dfrac{3}{2}C+o(\alpha)\right\},\ \alpha\to 0,\ \beta\to\infty; \\ -\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\pi h}}\left\{\ln\alpha+\dfrac{3}{2}C+o(\alpha)\right\}-\dfrac{\gamma}{2\sqrt{\pi h}\sqrt{1+\gamma^2}}\times \\ \quad \times\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\beta\ln\beta+o(\beta)\right\},\ \alpha\to 0,\ \beta\to 0; \end{cases} \tag{3,15}$$

$$n_s U_{sy} \approx$$

$$\approx \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{3h}}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}}\left\{1+\operatorname{erf}\left[\dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}\left[1+o\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)\right],\ \alpha\to\infty; \\ \dfrac{1}{4\sqrt{\pi h}}\left\{1+\dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}-\alpha\sqrt{\pi}\left(1+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\gamma}\right)+o(\alpha^2\ln\alpha)\right\},\ \alpha\to 0; \end{cases} \tag{3,16}$$

$$n_s T_s \approx$$

$$\approx \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{3}\,h}\left[1+\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}}\left\{1+\operatorname{erf}\left[\dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}\left[1+o\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)\right]- \\ -\dfrac{\gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{2\sqrt{3\pi}h(1+\gamma^2)} e^{-3\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2/3}}\left[1+o\left(\beta^{-\frac{2}{3}}\right)\right],\ \alpha\to\infty,\ \beta\to\infty; \\ \dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\gamma}\right)+\dfrac{1}{4}\left[1-\dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\gamma-\dfrac{\gamma}{1+\gamma^2}\right)\right]+o(\alpha\ln\alpha)\right\}, \\ \quad \alpha\to 0,\ \beta\to\infty; \\ \dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\gamma}\right)+\dfrac{1}{4}\left[1-\dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\gamma-\dfrac{\gamma}{1+\gamma^2}\right)\right]+o(\alpha\ln\alpha)\right\}- \\ -\dfrac{\gamma}{2\pi h(1+\gamma^2)}\left\{1-\sqrt{\pi}\beta-\beta^2\ln\beta+o(\beta^2)\right\},\ \alpha\to 0,\ \beta\to 0. \end{cases} \tag{3,17}$$

Когда рассматриваются параметры газа в точках далеко от носка пластинки, т. е. когда $\gamma\to 0$, формулы (3,15)—(3,17) переходят в асимптотические выражения, полученные для бесконечной пластинки [4]. Оказывается, что порядок толщины пограничного слоя такой же, как в случае бесконечной пластинки [4], т. е. обратно пропорционален M, что следует из состояния перехода от одной асимптотики (дальней) к другой (ближней). Внутренняя структура слоя характеризуется интегралами типа (3,3), (3,7)—(3,13). Вблизи носка пластинки макропараметры газа существенно зависят от γ. Подставляя (3,6), (3,15)—(3,17) в (2,10), окончательно получим выражения для макропараметров газа в первом приближении.

§ 4. Примеры

На рис. 4 имеются графики безразмерной плотности газа $n^{(1)}$ в зависимости от расстояния y от поверхности пластинки при $M=22$ и разных значениях расстояния x от передней кромки пластинки. Расчет проводился при $x=10^{-2}$; 0,5; 2; 10^2; 10^3 следующим образом.

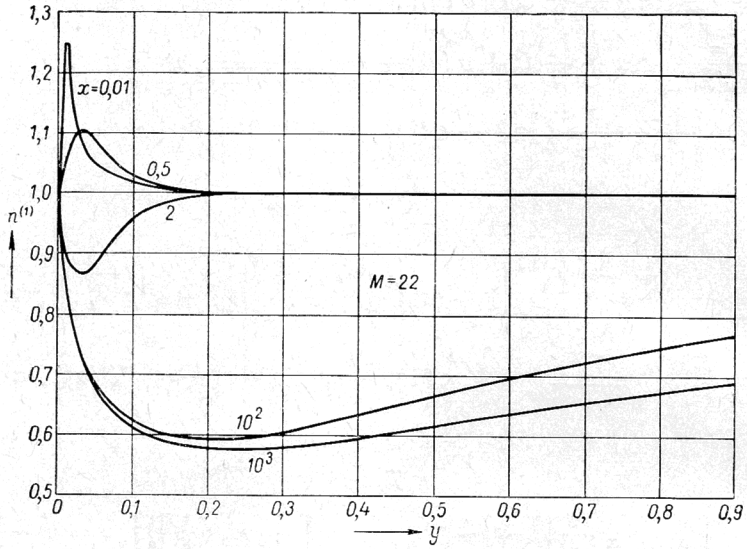

Рис. 4.

Фиксировались $h=\frac{5}{6}M^2$ и x. По ним вычислялись для разных y величины $\gamma=\frac{y}{x}$ и α (3,5). Далее определили $n^{(1)}$ по (2,10), причем, когда $0\leqslant\alpha\leqslant 8\cdot 10^{-2}$, пользовались формулой для n_s при $\alpha\to 0$, а когда $3\leqslant\alpha\leqslant\infty$ брали ту же формулу для $\alpha\to\infty$. При $\alpha=o(1)$ n_s была вычислена по (3,3) численно по методу Гаусса, аналогично [7]. Рассматривая поведение кривых для $n^{(1)}$ с учетом формулы (2,10), можно сделать следующие выводы. Во всех сечениях x плотность $n^{(1)}$ переходит при $y\to\infty$ в значения для плотности в невозмущенном набегающем потоке (нулевое приближение), причем этот процесс при малых x осуществляется быстрее, чем при больших x. Вблизи стенки $n^{(1)}$ претерпевает резкие изменения. При малых x, т. е. вблизи носка пластинки, $n^{(1)}$ при увеличении y сначала резко возрастает до максимального значения, а потом убывает и стремится к единице при $y\to\infty$. Это значит, что $n^{(1)}$ вблизи носка пластинки существенно зависит от $\gamma=\frac{y}{x}$. Для точек далеко от носка пластинки (большие x) $n^{(1)}$ ведет себя как в случае с бесконечной пластинкой [3], т. е. при увеличении y сначала резко убывает до минимального значения, а потом возрастает и стремится к значению в невозмущенном потоке при $y\to\infty$. Областью максимума $n^{(1)}$ (при малых x) и областью минимума $n^{(1)}$ (при больших x) является область, в которой $\alpha=o(1)$.

Summary

The non-uniform asymptotic values of gas macroparameters near the surface and the leading edge of a plate are investigated as a first approximation by means of the method of paper [2], M being large.

ЛИТЕРАТУРА

1. «Аэродинамика разреженных газов», Сб. I. Под ред. С. В. Валландера. Изд. ЛГУ, 1963.
2. Ю. Шлажа. Метод моментов при гиперзвуковом обтекании тел разреженным газом. Вестник ЛГУ, № 7, 1966.
3. J. Szlaza. Hyperschallumströmung einer unendlichen Platte durch verdünntes Gas. Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1966 (im Druck).
4. Р. Г. Баранцев, Ю. Шлажа. К асимптотической структуре пограничного слоя при больших M. Вестник ЛГУ, № 19, 1964.
5. M. Abramowitz. Evaluation of the integral $\int_0^\infty e^{-t^2-\frac{x}{t}}\,dt$. J. of Math. and Phys., **32**, No 2/3, 188, 1953.
6. J. Szlaza. Zur asymptotischen Struktur der Grenzschicht am vorderen Ende einer halbunendlichen Platte für grosse Machzahlen. ZAMM, Bd. 45, H. 2/3, 1965.
7. П. В. Мелентьев. Приближенные вычисления. М., Физматгиз, 1962.

Статья поступила в редакцию 3 июня 1966 г.