

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГОД ИЗДАНИЯ ДВАДЦАТЬ ТРЕТИЙ

Журнал выходит 24 раза в год, по четыре номера каждой серии



МАТЕМАТИКА □ МЕХАНИКА □ АСТРОНОМИЯ

Выпуск 1

ЯНВАРЬ

1968



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 533.6.011.8

Ю. Шлажа

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОТОКОВ МАССЫ, ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ ПРИ БОЛЬШИХ M

В настоящей работе исследуется с кинетической точки зрения асимптотика частоты ударов N молекул о тело, касательного импульса p_x и энергии E , передаваемых молекулами пластинке, в зависимости от расстояния x от передней кромки пластинки при больших M .

§ 1. Функция распределения $f^{(2)}(\bar{r}_s, \bar{u})$

Рассмотрим гиперзвуковое продольное обтекание бесконечно тонкой пластинки $y=0$, $x \geq 0$ одноатомным разреженным газом, средняя безразмерная скорость которого равна $\bar{U}_0 = \{1, 0, 0\}$. В дальнейшем все величины безразмерны. Допустим, что молекулы гладкие упругие шары и их отражение от стенки диффузное, а температура пластинки не отличается от температуры невозмущенного газа. Требуется найти асимптотическое поведение функций [1]

$$N(\bar{r}_s) = - \iiint_{u_y < 0} f(\bar{r}_s, \bar{u}) u_y d\bar{u}, \quad (1,1)$$

$$p_x(\bar{r}_s) = p_x^- - p_x^+, \quad (1,2)$$

$$E(\bar{r}_s) = E^- - E^+, \quad (1,3)$$

где

$$p_x^+ = 2 \iiint_{u_y > 0} \tilde{\Phi}(\bar{r}_s, \bar{u}) u_x d\bar{u}, \quad (1,4)$$

$$E^+ = \iiint_{u_y > 0} \tilde{\Phi}(\bar{r}_s, \bar{u}) u^2 d\bar{u}, \quad (1,5)$$

$$p_x^- = -2 \iiint_{u_y < 0} f(\bar{r}_s, \bar{u}) u_x u_y d\bar{u}, \quad (1,6)$$

$$E^- = - \iiint_{u_y < 0} f(\bar{r}_s, \bar{u}) u_y u^2 d\bar{u}, \quad (1,7)$$

причем $f(\bar{r}_s, \bar{u})$ — функция распределения молекул газа по координатам и скоростям; $\tilde{\Phi}$ — граничная функция рождений; $\bar{r}_s$ — радиус-вектор точки (x_s, y_s, z_s) на поверхности $F(\bar{r}_s) = 0$ обтекаемого тела; $\bar{u}$ — скорость молекул.

Так как в случае диффузного отражения $\tilde{\Phi} = \frac{2h^2}{\pi} u_y e^{-hu^2} N(\bar{r}_s)$ ($h = \frac{5}{6} M^2$) [1], то из (1,4) и (1,5) получим

$$p_x^+ = 0, \quad E^+ = -\frac{2}{h} N(\bar{r}_s). \quad (1,8)$$

Отсюда видно, что для определения N , p_x , E требуется найти N , p_x^- , E^- . Этим мы в дальнейшем и займемся. Введем обозначения

$$K_i = - \iiint_{u_y < 0} f(\bar{r}_s, \bar{u}) u_y w_i d\bar{u}, \quad i=0, 1, 2, \quad (1,9)$$

причем

$$K_0 = N(\bar{r}_s), \quad K_1 = \frac{1}{2} p_x^-(\bar{r}_s), \quad K_2 = E^-(\bar{r}_s), \quad (1,10)$$

$$w_0 = 1, \quad w_1 = u_x, \quad w_2 = u^2. \quad (1,11)$$

По методу последовательных приближений можно вычислить K_i следующим образом:

$$K_i^{(n)} = - \iiint_{u_y < 0} f^{(n)}(\bar{r}_s, \bar{u}) u_y w_i d\bar{u}, \quad i=0, 1, 2, \quad (1,12)$$

где n — номер приближения.

Если за нулевое приближение брать максвелловскую функцию распределения $f_0 = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h(\bar{u} - \bar{u}_0)^2}$, то функция распределения для падающих молекул в первом приближении тоже максвелловская [2] и по (1,12) будем иметь

$$K_i^{(0)} = K_i^{(1)}, \quad i=0, 1, 2, \quad (1,13)$$

где

$$K_0^{(1)} = K_0^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}}, \quad K_2^{(1)} = K_0^{(1)} \left(1 + \frac{2}{h}\right).$$

Отсюда видно, что в первом приближении еще ничего нельзя сказать о зависимости K_i от расстояния x от носка пластинки. Чтобы найти эту зависимость, рассмотрим второе приближение для $f(\bar{r}_s, \bar{u})$. Из кинетических уравнений С. В. Валландера [1] следует

$$f^{(2)}(\bar{r}_s, \bar{u}) = \int_0^\infty \Phi^{(1)}(\bar{r}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) \Pi^{(1)}(\bar{r}_s, \bar{u}, \tau) d\tau, \quad (1,14)$$

где τ — время свободного движения молекулы; $\Phi(\bar{r}, \bar{u})$ — внутренняя функция рождений; $\Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau)$ — вероятность свободного движения молекулы в точку $\bar{r}$ со скоростью $\bar{u}$ за время τ .

Дальше можно было бы искать $\Phi^{(1)}$ и $\Pi^{(1)}$ через коэффициенты $a_m^{\pm(1)}$ [3], но этот путь ведет к слишком громоздким расчетам. Поэтому мы сделаем здесь одно упрощающее предположение.

Воспользуемся хорошо известным из литературы [1], [4] так называемым τ -приближением, т. е. положим

$$\Phi^{(1)}(\bar{r}, \bar{u}) = f_0^{(1)}(\bar{r}, \bar{u}) Q_0^{(1)}(\bar{r}, \bar{u}), \quad (1,15)$$

где $f_0^{(1)}$ — локальное максвелловское распределение

$$f_0^{(1)}(\bar{r}, \bar{u}) = n^{(1)}(\bar{r}) \left[\frac{h^{(1)}(\bar{r})}{\pi} \right]^{3/2} \exp \{ -h^{(1)}(\bar{r}) [\bar{u} - \bar{U}^{(1)}(\bar{r})]^2 \}, \quad (1,16)$$

причем $n^{(1)}$ — численная плотность; $\bar{U}^{(1)}$ — средняя скорость и $T^{(1)} = \frac{h}{h^{(1)}}$ — температура газа ($h = \frac{5}{6} M^2$), которые были получены в [2] и $Q_0^{(1)}$ — функция столкновений, которая выражается таким образом [1]:

$$Q_0^{(1)}(\bar{r}, \bar{u}) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |\bar{u} - \bar{u}_1| f_0^{(1)}(\bar{r}, \bar{u}_1) d\bar{u}_1, \quad (1,17)$$

Принимая во внимание (1,16), из (1,17) получим [1]

$$Q_0^{(1)}(\bar{r}, \bar{u}) = \frac{n^{(1)}}{\sqrt{\pi h^{(1)}}} \left\{ e^{-h^{(1)} v^2} + \frac{1}{2v} \sqrt{\frac{\pi}{h^{(1)}}} (1 + 2h^{(1)} v^2) \operatorname{erf}(v \sqrt{h^{(1)}}) \right\}, \quad (1,18)$$

где $v = |\bar{u} - \bar{U}^{(1)}|$. Оставляя в асимптотических формулах для $\bar{U}^{(1)}$ и $T^{(1)}$ из [2] только главный член асимптотики при $h \rightarrow \infty$, будем иметь:

$$\bar{U}^{(1)} = \left\{ 1 - \frac{n_s}{n^{(1)}}, 0, 0 \right\}, \quad (1,19)$$

$$h^{(1)} = \frac{h}{T^{(1)}} = \frac{3n^{(1)^2}}{2(n^{(1)} - n_s) \left(\frac{3}{2h} n^{(1)} + n_s \right)}, \quad (1,20)$$

где n_s — плотность потока частиц, рожденных на стенке [2]. Отсюда видно, что $f_0^{(1)}(\bar{r}, \bar{u})$ и $Q_0^{(1)}(\bar{r}, \bar{u})$ выражаются только через $n^{(1)}$ и n_s . Принимая во внимание выражение для $\Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau)$ [1] и (1,15), (1,14) можно записать в виде

$$f^{(2)}(\bar{r}_s, \bar{u}) = \int_0^\infty f_0^{(1)}(\bar{r}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) Q_0^{(1)}(\bar{r}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) \times \\ \times \exp \left\{ - \int_0^\tau Q_0^{(1)}(\bar{r}_s - q \bar{u}, \bar{u}) dq \right\} d\tau, \quad (1,21)$$

где $f_0^{(1)}$ и $Q_0^{(1)}$ выражаются по (1,16) и (1,18). Подставляя (1,21) в (1,12), мы можем вычислить K_i во втором приближении.

§ 2. Выражения для $K_i^{(2)}$ ($i=0, 1, 2$)

По (1,12) имеем

$$K_i^{(2)} = - \int \int \int_{u_y < 0} f^{(2)}(\bar{r}_s, \bar{u}) u_y w_i d\bar{u}, \quad i=0, 1, 2, \quad (2,1)$$

где w_i и $f^{(2)}(\bar{r}_s, \bar{u})$ вычисляются по (1,11) и (1,21). После замены $u_y = -u_y$ интеграл (2,1) перепишется в виде

$$K_i^{(2)} = \int \int \int_{u_y > 0} f^{(2)}(\bar{r}_s, \bar{u}) w_i|_{u_y = -u_y} u_y d\bar{u}, \quad i=0, 1, 2. \quad (2,2)$$

Подынтегральная функция в (1,21) зависит от $f_0^{(1)}$ и $Q_0^{(1)}$, которые в виду (1,16), (1,18), (1,19), (1,20) выражаются через $n^{(1)}(\bar{r}_s - \tau \bar{u})$ и $n_s(\bar{r}_s - \tau \bar{u})$. Из [2] следует

$$n^{(1)}(\bar{r}_s - \tau \bar{u}) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \sqrt{h} \frac{\tau u_y}{x - \tau u_x} \right) + n_s(\bar{r}_s - \tau \bar{u}) + \\ + \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{h} \frac{\tau u_y}{x - \tau u_x} \right) \times \\ \times \left[1 - \exp \left\{ - \frac{1}{2} \tau u_y \sqrt{1 + \left(\frac{\tau u_y}{x - \tau u_x} \right)^2} \left(1 + \operatorname{erf} \sqrt{h} \frac{\tau u_y}{x - \tau u_x} \right) \right\} \right], \quad (2,3)$$

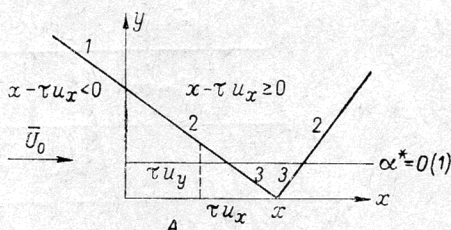
$$n_s(\bar{r}_s - \tau \bar{u}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-3\left(\frac{\alpha^*}{2}\right)^{2/3}} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{x - \tau u_x}{\tau u_y} \left(\frac{\alpha^*}{2} \right)^{1/3} \right] \right\} \left[1 + O\left(\alpha^{*-2/3}\right) \right]; & \alpha^* \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - \tau u_x}{\tau u_y} \right) + O(\alpha^* \ln \alpha^*); & \alpha^* \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{h}}{2} \tau u_y \left(1 + \operatorname{erf} \sqrt{h} \frac{\tau u_y}{x - \tau u_y} \right). \quad (2,5)$$

Как видно из (2,2) и (1,21), лишь четырехкратные интегралы. Ввиду неравномерной асимптотики $n_s(\bar{r}_s - \tau \bar{u})$ вблизи поверхности пластинки область интегрирования в (2,2) разделяется поверхностями Стокса на подобласти, в которых поведение подынтегральной функции различно. При вычислении (2,2) надо интегрировать по τ , т. е. по лучам, по которым молекулы могут собираться в точку $\bar{r}_s$ (рис. 1).



При $x - \tau u_x < 0$, т. е. для точек, расположенных перед пластиной $y=0$, $x \geq 0$, мы имеем невозмущенный поток и

$$f_0^{(1)} = f_0^{(0)} = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h v_0^2}, \quad (2.6)$$

$$Q_0^{(1)} = Q_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \left\{ e^{-h v_0^2} + \frac{1}{2v_0} \sqrt{\frac{\pi}{h}} (1 + 2h v_0^2) \operatorname{erf}(v_0 \sqrt{h}) \right\} \approx v_0.$$

Но в точках, для которых $x - \tau u_x \geq 0$, $f_0^{(1)}$ и $Q_0^{(1)}$ вычисляются по (1,16) и (1,18). Таким образом, одна из поверхностей Стокса будет $\tau u_x = x$, т. е. является гиперболическим цилиндром с осью Ou_v (рис. 2).

При $x - \tau u_x \geq 0$ выражение в скобках в (2,5) имеет порядок единицы для всех u и τ из области интегрирования в (2,2). Поэтому ввиду (2,2) и (2,5) второй поверхностью Стокса является гиперболический цилиндр $\tau u_y = h^{-\frac{1}{2}}$ с осью Ou_x (рис. 2).

Поверхность $\pi u_x = 0$ делит область интегрирования в пространстве τ , u_x , u_y на две части Ω_1 и Ω_2 , в которых $x - \pi u_x < 0$ и $x - \pi u_x \geq 0$.

Поверхность Стокса $u_y = h^{-\frac{1}{2}}$ делит в свою очередь Ω_2 на две под-
области, в одной из которых $\alpha^* \rightarrow 0$, а в другой $\alpha^* \rightarrow \infty$. Из рис. 1
и рис. 2 можно сделать следующие выводы относительно опреде-
ления $K_i^{(2)}$:

2) Собирая молекулы по отрезкам лучей 2, мы должны интегрировать по всем u_z и в пространстве τ , u_x , u_y по части области Ω_2 , в которой $\alpha^* \rightarrow \infty$.

3) Собирая молекулы по отрезкам 3 в пограничном слое, мы будем интегрировать по всем u_z и в пространстве τ , u_x , u_y по части области Ω_2 , в которой $\alpha^* \rightarrow 0$.

4) В окрестности поверхности Стокса $\tau u_y = h^{-\frac{1}{2}}$, т. е. при $\alpha^* = O(1)$, мы при оценке интеграла $K_i^{(2)}$ ограничимся только его порядком по h .

Таким образом, принимая во внимание поверхность Стокса $\tau u_x = x$, интегралы (2,2) можно переписать в виде

$$K_i^{(2)} = K_{i1}^{(2)} + K_{i2}^{(2)}, \quad i=0, 1, 2, \quad (2,7)$$

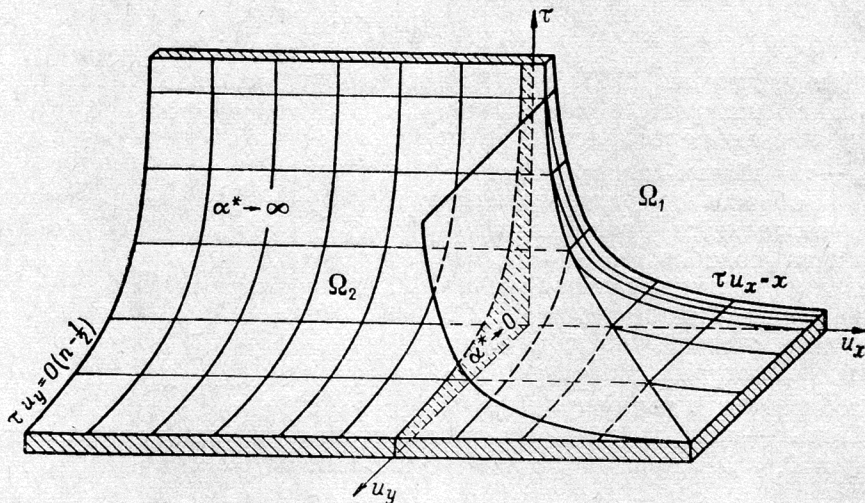


Рис. 2.

где

$$K_{i1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_1} \int u_y F_i du_x du_y d\tau du_z, \quad (2,8)$$

$$K_{i2}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_2} \int u_y F_i du_x du_y d\tau du_z, \quad (2,9)$$

и

$$F_i = f_0^{(1)}(\bar{r}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) Q_0^{(1)}(\bar{r}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) \times \\ \times \exp \left\{ - \int_0^{\tau} Q_0^{(1)}(\bar{r}_s - q \bar{u}, \bar{u}) dq \right\} w_i|_{u_y = -u_y}. \quad (2,10)$$

Ввиду (2,6) и рис. 2, для $K_{i1}^{(2)}$ имеем

$$K_{i1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_x \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{x}{u_x}}^{\infty} d\tau u_y v_0 f_0^{(0)} e^{-v_0 \tau} w_i. \quad (2,11)$$

Интегрируя в выражении (2,11) по τ , получим

$$K_{i1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_x \int_0^{\infty} du_y \cdot u_y f_0^{(0)} w_i e^{-v_0 \frac{x}{u_x}}. \quad (2,12)$$

Оценивая в (2,12) интегралы по u_x и u_z по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$, получим

$$K_{i1}^{(2)} \approx \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{w}_i u_y e^{-h u_y^2 - x u_y} du_y, \quad i=0, 1, 2, \quad (2,13)$$

где

$$\tilde{w}_0 = \tilde{w}_1 = 1, \quad \tilde{w}_2 = 1 + \frac{1}{h} + u_y^2. \quad (2,14)$$

Интегралы вида (2,13) берутся. В результате будем иметь:

$$K_{01}^{(2)} \approx K_{11}^{(2)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \{1 - x\sqrt{\pi} e^{x^2} [1 - \operatorname{erf} x]\}, \quad (2,15)$$

$$K_{21}^{(2)} \approx \left[1 + \frac{1}{h} \left(\frac{5}{2} + x^2\right)\right] K_{01}^{(2)} - \frac{1}{4\sqrt{\pi h h}}, \quad (2,16)$$

где $x = \frac{x}{2\sqrt{h}}$. Далее, принимая во внимание (2,9) и рис. 2, $K_{i2}^{(2)}$ можно записать в виде

$$K_{i2}^{(2)} = K_{i2_1}^{(2)} + K_{i2_2}^{(2)} + K_{i2_3}^{(2)}, \quad (2,17)$$

где

$$K_{i2_1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{h}{2} - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)}^{\frac{h}{2} - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)} \frac{u_y}{\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x u_y F_i, \quad (2,18)$$

$$K_{i2_2}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{h}{2} - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)}^{\frac{h}{2} - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)} \frac{u_y}{\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x u_y F_i, \quad (2,19)$$

$$K_{i2_3}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{h}{2} - \frac{1}{2}(\varepsilon+1)}^{\frac{h}{2} - \frac{1}{2}(\varepsilon+1)} \frac{u_y}{\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x u_y F_i. \quad (2,20)$$

Интеграл (2,19) выделяет окрестность поверхности Стокса $\tau u_y = h^{-\frac{1}{2}}$, в которой $\alpha^* = O(1)$. Вообще говоря, ε должно быть функцией от h , которая стремится к нулю при $h \rightarrow \infty$. Проведенные в [2] и [5] расчеты макропараметров газа показывают, что при возрастании h область численного интегрирования (где $\alpha^* = O(1)$) так сильно сужается, что практически асимптотическими формулами можно пользоваться вплоть до поверхности Стокса. Это подсказывает, что (2,19) не должен давать вклад в главный член асимптотики $K_{i2}^{(2)}$. Ввиду непрерывности $n^{(1)}$ и n_s [2] подынтегральная функция в (2,19) также непрерывна. Поэтому, переходя в (2,19) от интегрирования по τ к интегрированию по $y_1 = \tau u_y$ и оценивая потом интеграл по y_1 по теореме о среднем значении, получим следующую оценку:

$$K_{i2_2}^{(2)} \approx O\left(\varepsilon h^{-\frac{1}{2}}\right), \quad i=0, 1, 2. \quad (2,21)$$

Функцию $\varepsilon(h)$ можно уточнить, вычисляя $n^{(1)}$ (которая входит в (2,19) в виде интеграла) для разных значений h и определяя потом степень сужения области численного интегрирования в зависимости от h . Но мы здесь ограничимся только оценкой (2,21). Чтобы найти для $K_{i2}^{(2)}$ главный член асимптотики, надо еще оценить интегралы (2,18) и (2,20).

§ 3. Оценка интегралов $K_{i2_3}^{(2)}$

По (2,20) имеем

$$K_{i2_3}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{1}{h - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)}}^{\frac{x}{\tau}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} du_x u_y F_i, \quad i=0, 1, 2. \quad (3,1)$$

Здесь интегрирование производится по области в пространстве τ, u_x, u_y , в которой $\alpha^* \rightarrow \infty$. Принимая во внимание (2, 10), (1,16), (1,18) и оставляя в (1,19), (1,20), (2,3) и (2,4) только главные члены асимптотики при $\alpha^* \rightarrow \infty$, интегралы в (3,1) можно переписать в виде

$$K_{i2_3}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{1}{h - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)}}^{\frac{x}{\tau}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} du_x u_y v_0 f_0^{(0)} e^{-v_0 \tau} w_i, \quad (3,2)$$

где $v_0, f_0^{(0)}$ и w_i величины из (2,6) и (1,11). Оценивая в (3,2) интегралы по u_z по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$, получим

$$K_{i2_3}^{(2)} \approx \frac{h}{\pi} \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{1}{h - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)}}^{\frac{x}{\tau}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} du_x u_y w_i^* \sqrt{(u_x - 1)^2 + u_y^2} \times \\ \times e^{-h[(u_x - 1)^2 + u_y^2] - \tau \sqrt{(u_x - 1)^2 + u_y^2}}, \quad (3,3)$$

где

$$w_0^* = 1, \quad w_1^* = u_x, \quad w_2^* = u_x^2 + u_y^2 + \frac{1}{2h}. \quad (3,4)$$

Интегралы по u_x можно разбить на две части, а именно

$$\int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x = \int_{-\infty}^0 du_x + \int_0^{\frac{x}{\tau}} du_x. \quad (3,5)$$

Как видно из (3,3), при интегрировании по u_x максимум подынтегральной функции находится в точке $u_x = 1$. Так как эта точка лежит вне области интегрирования первого интеграла в правой части (3,5), то он имеет порядок $e^{-o(h)}$ [6]. Следовательно, при вычисле-

нии $K_{i2_3}^{(2)}$ главную роль играет $\int_0^{\frac{x}{\tau}} du_x$. Это ясно и из физических соображений (см. рис. 1), т. е. интегрирование по отрезкам луча 2, для которых $u_x < 0$, не должно давать вклад в главный член асимптотики, так как по этим лучам в точку x собирается меньше частиц, чем по лучам, для которых $u_x > 0$. Принимая во внимание рис. 2, выражение для $K_{i2_3}^{(2)}$ перепишем в виде

$$K_{i2}^{(2)} \approx \frac{h}{\pi} \int_0^\infty du_x \int_0^{\frac{x}{u_y}} d\tau \int_{\frac{1}{h} - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)}^{\frac{\tau}{2}} du_y u_y w_i^* \sqrt{(u_x-1)^2 + u_y^2} \times \\ \times e^{-h[(u_x-1)^2 + u_y^2] - \tau \sqrt{(u_x-1)^2 + u_y^2}} + O(e^{-h}). \quad (3,6)$$

Оценивая здесь интеграл по u_x в окрестности точки $u_x=1$ по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$ и переходя от переменной интегрирования u_y к $z = h^{1/2}(1+\varepsilon)^{-1}\tau u_y$, получим

$$K_{i2}^{(2)} \approx \frac{h^{-1}}{\sqrt{\pi}} (1+\varepsilon)^3 \int_0^\infty \int_0^x \tilde{w}_i z^2 e^{-h - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)z - (1+\varepsilon)^2 \frac{z^2}{\tau^2}} \frac{d\tau}{d\tau^3} dz, \quad i=0, 1, 2, \quad (3,7)$$

где $\tilde{w}_i$ — величины из (2,14). После замены переменных $\frac{1}{\tau} = t$ эти двойные интегралы вычисляются, и в результате будем иметь:

$$K_{02}^{(2)} \approx \frac{z}{2\sqrt{h}} e^{z^2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{1}{x} + z \right] \right\} \approx K_{12}^{(2)}, \quad (3,8)$$

$$K_{22}^{(2)} \approx \left(1 + \frac{5}{2h} \right) K_{02}^{(2)} + \frac{1}{4\sqrt{\pi} h^2} e^{-\frac{1}{x^2} - 2\frac{z}{x}}, \quad (3,9)$$

где $z = \frac{x}{2\sqrt{h}}$. Чтобы получить окончательные асимптотические формулы для $K_i^{(2)}$, осталось еще исследовать интегралы $K_{i2}^{(2)}$.

§ 4. Асимптотика интегралов $K_{i2}^{(2)}$

По (2,18) имеем

$$K_{i2}^{(2)} = \int_{-\infty}^\infty du_z \int_0^\infty du_y \int_0^{\frac{x}{u_y}} d\tau \int_{-\infty}^\tau du_x u_y F_i, \quad i=0, 1, 2, \quad (4,1)$$

где в силу (2,10) и (1,11)

$$F_i = \Phi^{(1)}(\bar{r}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) \exp \left\{ - \int_0^\tau Q_0^{(1)}(\bar{r}_s - q\bar{u}, \bar{u}) dq \right\} w_i|_{u_y = -u_y}, \quad (4,2)$$

$$w_0 = 1, \quad w_1 = u_x, \quad w_2 = u^2. \quad (4,3)$$

В (4,1) интегрирование производится по всем u_z и в пространстве τ, u_x, u_y по части области Ω_2 , в которой $\alpha^* \rightarrow 0$. Переходя в (4,1) от интегрирования по τ к интегрированию по $y_1 = \tau u_y$ и оценивая потом интеграл по y_1 по теореме о среднем значении, получим

$$K_{i2}^{(2)} \approx h^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^\infty du_z \int_0^\infty du_y \int_{-\infty}^{\frac{h u_y}{u_y}} du_x \Phi^{(1)}\left(\bar{r}_s - \frac{y_0}{u_y} \bar{u}, \bar{u}\right) \times \\ \times e^{-\int_0^{\frac{y_0}{u_y}} Q_0^{(1)}(\bar{r}_s - q\bar{u}, \bar{u}) dq} w_i + o\left(\varepsilon h^{-\frac{1}{2}}\right), \quad (4,4)$$

где $\lambda = \frac{x}{y_0}$ и $0 < y_0 < h^{-\frac{1}{2}}$. Выражение (4,4) можно переписать в виде

$$K_{l_2}^{(2)} \approx h^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left\{ \int_0^{\tilde{y}_0} + \int_{\tilde{y}_0}^{\infty} \right\} du_y \int_{-\infty}^{\lambda u_y} du_x w_i \Phi^{(1)} e^{-\int_0^{\frac{y_0}{u_y}} Q_0^{(1)} dq} + o\left(\varepsilon h^{-\frac{1}{2}}\right), \quad (4,5)$$

где $\tilde{y}_0 = o(y_0^\alpha)$ и $0 < \alpha < 1$.

Оценивая $\int_0^{\tilde{y}_0} du_y$ по теореме о среднем значении, получим в (4,5) слагаемое $o\left(\tilde{y}_0 h^{-\frac{1}{2}}\right)$. Оставшийся интеграл имеет порядок $h^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому окрестность малых u_y не дает вклад в главный член асимптотики $K_{l_2}^{(2)}$. Следовательно, так как при $u_y \geq \tilde{y}_0$ верхний предел интеграла по q стремится к нулю при $h \rightarrow \infty$, выражение (4,5) можно записать в виде

$$K_{l_2}^{(2)} \approx h^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{-\infty}^{\lambda u_y} du_x \Phi^{(1)} \left(\bar{r}_s - \frac{y_0}{u_y} \bar{u}, \bar{u} \right) w_i + o\left(\tilde{y}_0 h^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (4,6)$$

Это значит, что дальнейшие исследования проводим в рамках теории однократных столкновений, так как в нашем случае вероятность свободного пробега равна единице. Как уже было отмечено в § 2, $\Phi^{(1)}$ выражается через $n^{(1)}$ и n_s . Эти величины после оценки в (4,1) интеграла по τ и ввиду (2,3) и (2,4) примут вид:

$$\begin{aligned} n^{(1)} &\approx \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{\sqrt{h}}{\beta^*} \right) + n_s + \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{\sqrt{h}}{V_{1+\beta^{*2}}} \right) \left[1 - \exp \left\{ \frac{1}{2} y_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^{*2}}} \times \left(1 + \operatorname{erf} \frac{\sqrt{h}}{\beta^*} \right) \right\} \right], \quad (4,7) \\ n_s &\approx \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \beta^* \right), \quad (4,8) \end{aligned}$$

где

$$\beta^* = \frac{x - \frac{y_0}{u_y} u_x}{y_0}. \quad (4,9)$$

Здесь β^* — котангенс угла между пластинкой и прямой, проходящей через переднюю кромку пластинки и точки в пограничном слое, расположенные на расстоянии y_0 от пластинки. Для существенного упрощения дальнейших вычислений выпишем для $n^{(1)}$ и n_s только главные члены асимптотики при $\beta^* \rightarrow 0$ и $\beta^* \rightarrow \infty$. Из (4,7) и (4,8) следует:

$$n_s \approx \begin{cases} \frac{1}{4}, & \beta^* \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2}, & \beta^* \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4,10)$$

$$n^{(1)} \approx \begin{cases} n_2^{(1)} = \frac{5}{4}, & \beta^* \rightarrow 0, \\ n_1^{(1)} = 1, & \beta^* \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4,11)$$

Принимая во внимание (1,19), (1,20), (4,10) и (4,11), мы можем выписать главные члены асимптотики $\bar{U}^{(1)}$ и $h^{(1)}$, а именно

$$\bar{U}^{(1)} \approx \begin{cases} \bar{U}_2^{(1)} = \left\{ \frac{4}{5}, 0, 0 \right\}, & \beta^* \rightarrow 0, \\ \bar{U}_1^{(1)} = \left\{ \frac{1}{2}, 0, 0 \right\}, & \beta^* \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4,12)$$

$$h^{(1)} \approx \begin{cases} h_1^{(1)} = 6, & \beta^* \rightarrow \infty, \\ h_2^{(2)} = \frac{75}{8}, & \beta^* \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4,13)$$

Поведение подынтегральной функции в (4,6) различно при $\beta^* \rightarrow 0$ и $\beta^* \rightarrow \infty$. Этот факт приводит к разбиению области интегрирования в (4,6) на две подобласти. Из (4,9) следует, что $\beta^* = o(1)$, когда $x - \frac{y_0}{u_y} u_x = o(y_0)$. Отсюда вытекает, что поверхностью Стокса в пространстве u является плоскость $u_x = (\lambda - 1) \times \times u_y$ (рис. 3). Принимая во внимание поверхность Стокса, перепишем (4,6) в виде

$$K_{i2}^{(2)} = \Omega_i^* + \widetilde{\Omega}_i, \quad i=0, 1, 2, \quad (4,14)$$

где

$$\Omega_i^* \approx h^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{-\infty}^{(\lambda-1)u_y} du_x w_i \Phi_1^{(1)}(v_1), \quad (4,15)$$

$$\widetilde{\Omega}_i \approx h^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{(\lambda-1)u_y}^{\lambda u_y} du_x w_i \Phi_2^{(1)}(v_2), \quad (4,16)$$

причем

$$v_1 = |\bar{u} - \bar{U}_1^{(1)}|, \quad v_2 = |\bar{u} - \bar{U}_2^{(1)}|. \quad (4,17)$$

Индекс „1“ в (4,15) означает, что в выражении для $\Phi^{(1)}$ стоят значения $n^{(1)}$, $\bar{U}^{(1)}$, $h^{(1)}$ при $\beta^* \rightarrow \infty$ и индекс „2“ в (4,16) означает, что $\Phi^{(1)}$ выражается через эти функции при $\beta^* \rightarrow 0$. Надо еще отметить, что в (4,15) и (4,16) подынтегральные функции определяются при $\beta^* \rightarrow \infty$ и $\beta^* \rightarrow 0$ вплоть до поверхности Стокса. Делаем мы такое допущение только с целью упрощения дальнейших исследований. После замены переменных $u_x - \frac{1}{2} = t$ в (4,15), $u_x - \frac{4}{5} = t$ в (4,16) и $t = -t$ получим:

$$\Omega_i^* \approx h^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{1}{2} - (\lambda-1)u_y}^{\infty} dt w_i^* \Phi_1^{(1)}(v), \quad (4,18)$$

$$\widetilde{\Omega}_i \approx h^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{4}{5} - (\lambda-1)u_y}^{\frac{4}{5} - \lambda u_y} dt \widetilde{w}_i \Phi_2^{(1)}(v), \quad (4,19)$$

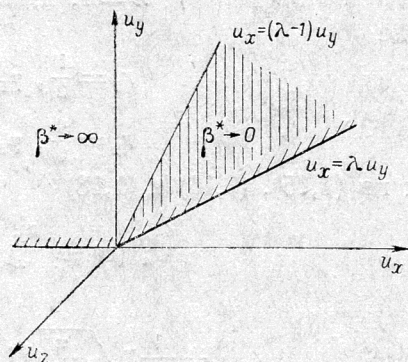


Рис. 3.

где

$$v^2 = t^2 + u_y^2 + u_z^2, \quad (4,20)$$

$$w_0^* = 1, \quad w_1^* = \frac{1}{2} - t, \quad w_2^* = v^2 - t + \frac{1}{4}, \quad (4,21)$$

$$\widetilde{w}_0 = 1, \quad \widetilde{w}_1 = \frac{4}{5} - t, \quad \widetilde{w}_2 = v^2 - \frac{8}{5}t + \frac{16}{25}. \quad (4,22)$$

Введем обозначения

$$R_{nk}^{(i)} = h^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{r_n - \mu_k u_y}^{\infty} dt w_i^{(n)} \Phi_n^{(1)}(v), \quad (4,23)$$

$$n = 1, 2; \quad k = 1, 2; \quad i = 0, 1, 2,$$

где

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_1 = \lambda, \quad w_i^{(1)} = w_i^*, \quad (4,24)$$

$$r_2 = \frac{4}{5}, \quad \mu_2 = \lambda - 1, \quad w_i^{(2)} = \widetilde{w}_i$$

и по (1,15), (1,16) и (1,18)

$$\Phi_n^{(1)}(v) = \frac{n_n^{(1)^2}}{\pi^2} h_n^{(1)} e^{-h_n^{(1)} v^2} \left\{ e^{-h_n^{(1)} v^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2v} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} (1 + 2h_n^{(1)} v^2) \operatorname{erf} \left(v \sqrt{h_n^{(1)}} \right) \right\}. \quad (4,25)$$

Принимая во внимание (4,23), перепишем (4,18) и (4,19) в виде:

$$\Omega_i^* \approx R_{12}^{(i)}, \quad (4,26)$$

$$\widetilde{\Omega}_i \approx R_{21}^{(i)} - R_{22}^{(i)}. \quad (4,27)$$

Как следует из (4,23), $R_{nk}^{(i)} = O\left(h^{-\frac{1}{2}}\right)$ и эти функции могут быть записаны следующим образом:

$$R_{nk}^{(i)} = h^{-\frac{1}{2}} \Psi_{nk}^{(i)}(\lambda), \quad \lambda \geq 0, \quad (4,28)$$

где

$$\Psi_{nk}^{(i)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{r_n - \mu_k u_y}^{\infty} dt w_i^{(n)} \Phi_n^{(1)}(v), \quad (4,29)$$

$$n = 1, 2; \quad k = 1, 2; \quad i = 0, 1, 2.$$

Принимая во внимание (4,26)–(4,28), по (4,14) получим

$$K_{12}^{(2)} \approx h^{-\frac{1}{2}} \{\Psi_{12}^{(i)} + \Psi_{21}^{(i)} - \Psi_{22}^{(i)}\}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (4,30)$$

Отсюда видно, что $K_{12}^{(2)} = O\left(h^{-\frac{1}{2}}\right)$ и для окончательного результата требуется еще определить функции $\Psi_{nk}^{(i)}$. Эти исследования проводим в следующих параграфах, где исходим из выражения (4,29), причем надо вычислить тройные интегралы, которые уже нельзя оценить асимптотически.

§ 5. Определение функций $\Psi_{nk}^{(i)}(\lambda)$

Так как $\lambda \geq 0$, при вычислении $\Psi_{nk}^{(i)}(\lambda)$ по (4,29) надо различать два случая, а именно случаи $\mu_k \geq 0$ и $\mu_k < 0$. Это различие влияет на вид области интегрирования (рис. 4, 5). Произведем поворот осей на угол ψ , т. е. сделаем в (4,29) замену переменных интегрирования t, u_y на ξ, η по формулам:

$$t = \xi \cos \psi + \eta \sin \psi, \quad u_y = \eta \cos \psi - \xi \sin \psi. \quad (5,1)$$

Тогда имеем (рис. 4, 5)

$$\Psi_{nk}^{(i)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{r_{nk}}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\mu_k \eta} d\xi \bar{w}_{ik}^{(n)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{v}), \quad (5,2)$$

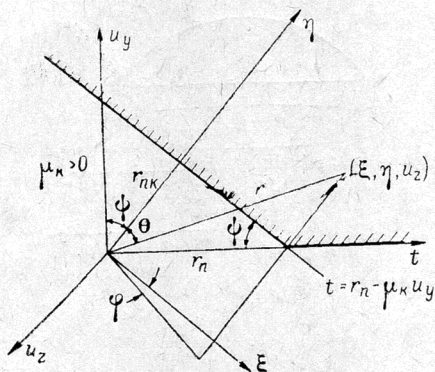


Рис. 4.

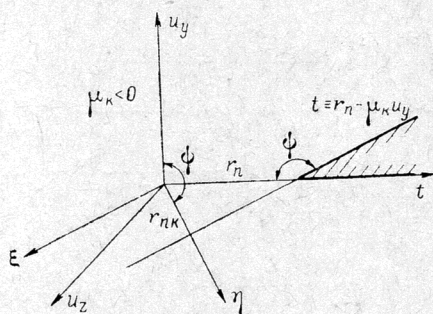


Рис. 5.

где

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\mu_k}, \quad r_{nk} = \frac{r_n}{\sqrt{1 + \mu_k^2}}, \quad (5,3)$$

$$\tilde{v}^2 = \xi^2 + \eta^2 + u_z^2, \quad (5,4)$$

$$\bar{w}_{0k}^{(n)} = 1; \quad \bar{w}_{1k}^{(n)} = r_n - g(\psi, \xi, \eta); \quad \bar{w}_{2k}^{(n)} = \tilde{v}^2 - 2r_n g(\psi, \xi, \eta) + r_n^2, \quad (5,5)$$

$$g(\psi, \xi, \eta) = \xi \cos \psi + \eta \sin \psi. \quad (5,6)$$

Переходя в (5,2) к сферическим координатам (рис. 4)

$$\xi = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \eta = r \cos \theta, \quad u_z = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \tilde{v} = r, \quad (5,7)$$

получим (рис. 6, 7)

$$\Psi_{nk}^{(i)} = \begin{cases} \Psi_{nk}^{(i)*}, & \mu_k \leq 0, \quad i = 0, 1, 2, \\ & n = 1, 2, \\ \bar{\Psi}_{nk}^{(i)}, & \mu_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \end{cases} \quad (5,8)$$

где

$$\Psi_{nk}^{(i)*} = \int_{r_n}^{\infty} dr \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta \int_{\varphi_1}^{2\pi - \varphi_1} d\varphi r^2 \sin \theta \bar{w}_{ik}^{(n)} \Phi_n^{(1)}(r), \quad (5,9)$$

$$\bar{\Psi}_{nk}^{(i)} = \left\{ \int_{r_{nk}}^{r_n} dr \int_0^{\theta_1} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi + \int_{r_n}^{\infty} dr \left[\int_0^{\theta_2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi + \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta \int_{\varphi_1}^{2\pi - \varphi_1} d\varphi \right] \right\} \times \\ \times r^2 \sin \theta \bar{w}_{ik}^{(n)} \Phi_n^{(1)}(r), \quad (5,10)$$

причем

$$\tilde{w}_{0k}^{(n)} = 1, \quad \tilde{w}_{1k}^{(n)} = r_n - r g_1(\psi, \theta, \varphi); \quad \tilde{w}_{2k}^{(n)} = r^2 - 2r_n r g_1(\psi, \theta, \varphi) + r_n^2, \quad (5,11)$$

$$g_1(\psi, \theta, \varphi) = \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \cos \theta, \quad (5,12)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{r_{nk}}{r}, \quad \cos \theta_2 = \frac{r_{nk}}{r_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}}, \quad \cos \varphi_1 = \mu_k \operatorname{ctg} \theta. \quad (5,13)$$

Если ввести функции

$$H_{nki}^{(i)} = \iiint_{\omega_j} r^2 \sin \theta \chi_{ik} \Phi_n^{(1)}(r) dr d\theta d\varphi, \quad (5,14)$$

$$n = 1, 2, k = 1, 2, i = 0, 1, 2, j = 1, 2, 3,$$

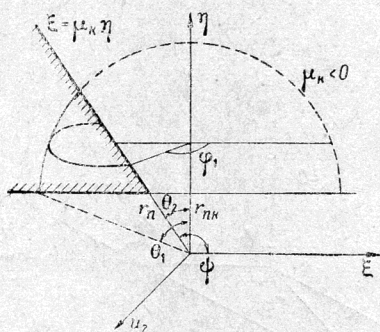


Рис. 6.

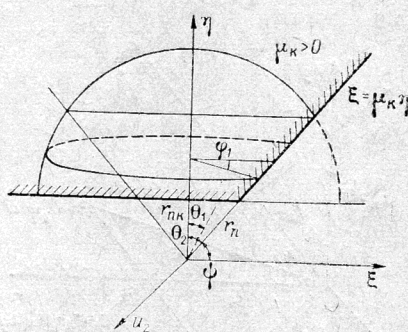


Рис. 7.

где

$$\chi_{0k} = 1, \quad \chi_{1k} = r g_1(\mu_k, \theta, \varphi), \quad \chi_{2k} = r^2, \quad (5,15)$$

$$\omega_1 = \left\{ \begin{array}{l} r_{nk} \leq r \leq r_n \\ 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}, \quad \omega_2 = \left\{ \begin{array}{l} r_n \leq r \leq \infty \\ 0 \leq \theta \leq \theta_2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}, \quad \omega_3 = \left\{ \begin{array}{l} r_n \leq r \leq \infty \\ \theta_2 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_1 \end{array} \right\}, \quad (5,16)$$

то (5,8) можно переписать в виде:

$$\Psi_{nk}^{(0)} = \begin{cases} H_{nk0}^{(3)}, & \mu_k \leq 0, \\ \sum_{j=1}^3 H_{nk0}^{(j)}, & \mu_k \geq 0, \end{cases} \quad (5,17)$$

$$\Psi_{nk}^{(1)} = \begin{cases} r_n H_{nk0}^{(3)} - H_{nk1}^{(3)}, & \mu_k \leq 0, \\ \sum_{j=1}^3 (r_n H_{nk0}^{(j)} - H_{nk1}^{(j)}), & \mu_k \geq 0, \end{cases} \quad (5,18)$$

$$\Psi_{nk}^{(2)} = \begin{cases} r_n^2 H_{nk0}^{(3)} - 2r_n H_{nk1}^{(3)} + H_{nk2}^{(3)}, & \mu_k \leq 0, \\ \sum_{j=1}^3 (r_n^2 H_{nk0}^{(j)} - 2r_n H_{nk1}^{(j)} + H_{nk2}^{(j)}), & \mu_k \geq 0. \end{cases} \quad (5,19)$$

§ 6. Асимптотические выражения для $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$, $E^{(2)}$

Ввиду (4,30) $K_{i2_i}^{(2)}$ можно записать следующим образом:

$$K_{i2_i}^{(2)} = h^{-\frac{1}{2}} w_i(\lambda), \quad i = 0, 1, 2, \quad (6,1)$$

где

$$w_i(\lambda) = \Psi_{12}^{(i)} + \Psi_{21}^{(i)} - \Psi_{22}^{(i)}. \quad (6,2)$$

Принимая во внимание (5,17)–(5,19) и тот факт, что $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \leq 0$ при $0 \leq \lambda \leq 1$ и $\mu_k \geq 0$ ($k=1, 2$) при $\lambda \geq 1$, из (6,2) получим:

$$w_0(\lambda) = V_0(\lambda), \quad (6,3)$$

$$w_1(\lambda) = r_1 V_{01}(\lambda) + r_2 V_{02}(\lambda) - V_1(\lambda), \quad (6,4)$$

$$w_2(\lambda) = r_1^2 V_{01}(\lambda) + r_2^2 V_{02}(\lambda) - 2r_1 V_{11}(\lambda) - 2r_2 V_{12}(\lambda) + V_2(\lambda), \quad (6,5)$$

где

$$V_i(\lambda) = V_{i1}(\lambda) + V_{i2}(\lambda), \quad i=0, 1, 2, \quad (6,6)$$

$$V_{i1}(\lambda) = \begin{cases} H_{12i}^{(3)}, & 0 \leq \lambda \leq 1, \\ \sum_{j=1}^3 H_{12i}^{(j)}, & \lambda \geq 1, \end{cases} \quad (6,7)$$

$$V_{i2}(\lambda) = \begin{cases} \sum_{j=1}^3 H_{21i}^{(j)} - H_{22i}^{(3)}, & 0 \leq \lambda \leq 1, \\ \sum_{j=1}^3 (H_{21i}^{(j)} - H_{22i}^{(j)}), & \lambda \geq 1. \end{cases} \quad (6,8)$$

Так как по (2,21), (3,8) и (3,9) $K_{i2}^{(2)} = O(\varepsilon h^{-\frac{1}{2}})$ и $K_{i3}^{(2)} = O(h^{-1})$, главный член асимптотики для $K_{i2}^{(2)}$ (2,17) получаем при оценке интеграла $K_{i2}^{(2)}$, а именно по (6,1) имеем $K_{i2}^{(2)} = O(h^{-\frac{1}{2}})$. Вклад в главный член асимптотики $K_{i1}^{(2)}$ (2,7) дает и интеграл $K_{i1}^{(2)}$, так как по (2,15) и (2,16) $K_{i1}^{(2)} = O(h^{-\frac{1}{2}})$. Отсюда следует, что главный член асимптотики функций $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$ получим именно тогда, когда в (2,1) интегрируем по лучам 1 (влияние невозмущенного потока) и по всем отрезкам 3 в пограничном слое (см. рис. 1), что ясно из физических соображений.

Принимая во внимание (1,1)–(1,3), (1,8), (1,10), (2,7), (2,15)–(2,17), (2,21), (3,8), (3,9), (6,1)–(6,8), получим следующие асимптотические формулы для $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$, $E^{(2)}$:

$$N^{(2)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \left\{ 1 + F_0(\lambda) + O\left(y_0 h^{-\frac{1}{2}}\right) \right\}, \quad (6,9)$$

$$\frac{1}{2} p_x^{(2)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} F_{01}(\lambda) + \frac{4}{5} F_{02}(\lambda) - F_1(\lambda) + O\left(y_0 h^{-\frac{1}{2}}\right) \right\}, \quad (6,10)$$

$$E^{(2)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} F_{01} + \frac{16}{25} F_{02} - F_{11} - \frac{8}{5} F_{12} + F_2 + O\left(y_0 h^{-\frac{1}{2}}\right) \right\}, \quad (6,11)$$

где

$$F_i(\lambda) = 2\sqrt{\pi} V_i(\lambda), \quad i=0, 1, 2. \quad (6,12)$$

Из (6,6)–(6,12) видно, что асимптотическое поведение $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$ неравномерно в окрестности точки $x=0$. Для полного определения $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$ надо еще вычислить интегралы $H_{nhi}^{(j)}$ по (5,14).

§ 7. Вычисление интегралов $H_{nki}^{(j)}$

В настоящем параграфе не остановимся подробно на вычислении интегралов $H_{nki}^{(j)}$, а приведем только полученные результаты. По (5,14) имеем

$$H_{nki}^{(j)} = \int \int_{\omega_j} r^2 \sin \theta \chi_{ik} \Phi_n^{(1)}(\bar{r}) dr d\theta d\varphi, \quad (7,1)$$

$$n=1, 2, ; k=1, 2; i=0, 1, 2; j=1, 2, 3,$$

где $\Phi_n^{(1)}(r)$, χ_{ik} и ω_j определяются по (4,25), (5,15) и (5,16). Как видно из (6,6)—(6,12), для нахождения $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$, $E^{(2)}$ нам надо знать $H_{nki}^{(2)}$ и $\sum_{j=1}^3 H_{nki}^{(j)}$, кроме случая $n=1, k=1$. Вычисляя в (7,1) интегралы по θ и φ , получим:

$$H_{nk0}^{(3)} = 2\pi r_{nk} \left(\frac{1}{r_n} B_n^{(2)} - B_n^{(1)} \right) + 2r_{nk} D_{nk}^{(1)}(\lambda) - G_{nk}^{(2)}(\lambda), \quad (7,2)$$

$$\sum_{j=1}^3 H_{nk0}^{(j)} = 2\pi [C_{nk}^{(2)}(\lambda) - r_{nk} C_{nk}^{(1)}(\lambda)] + 2r_{nk} D_{nk}^{(1)}(\lambda) - G_{nk}^{(2)}(\lambda), \quad (7,3)$$

$$H_{nk1}^{(3)} = \frac{1}{V_{1+\mu_k^2}} \{ D_{nk}^{(3)}(\lambda) - r_{nk}^2 D_{nk}^{(1)}(\lambda) + \mu_k r_{nk} E_n \}, \quad (7,4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 H_{nk1}^{(j)} = \frac{1}{V_{1+\mu_k^2}} \left\{ \pi \left[C_{nk}^{(3)}(\lambda) - r_{nk}^2 \left(C_{nk}^{(1)}(\lambda) - B_n^{(1)} + \frac{1}{r_n^2} B_n^{(3)} \right) \right] + \right. \\ \left. + D_{nk}^{(3)}(\lambda) - r_{nk}^2 D_{nk}^{(1)}(\lambda) + \mu_k r_{nk} E_n \right\}, \end{aligned} \quad (7,5)$$

$$H_{nk2}^{(3)} = 2\pi r_{nk} \left(\frac{1}{r_n} B_n^{(4)} - B_n^{(3)} \right) + 2r_{nk} D_{nk}^{(3)}(\lambda) - C_{nk}^{(4)}(\lambda), \quad (7,6)$$

$$\sum_{j=1}^3 H_{nk2}^{(j)} = 2\pi [C_{nk}^{(4)}(\lambda) - r_{nk} C_{nk}^{(3)}(\lambda)] + 2r_{nk} D_{nk}^{(3)}(\lambda) - G_{nk}^{(4)}(\lambda), \quad (7,7)$$

где r_n , μ_k и r_{nk} — величины из (4,24) и (5,3) и

$$D_{nk}^{(m)}(\lambda) = \int_{r_n}^{\infty} r^m \Phi_n^{(1)}(r) \arccos(A_{nk}) dr, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (7,8)$$

$$G_{nk}^{(m)}(\lambda) = \int_{r_n}^{\infty} r^m \Phi_n^{(1)}(r) \arccos \left(\frac{\mu_k^2 + 2A_{nk}^2 - 1}{1 + \mu_k^2} \right) dr, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (7,9)$$

$$E_n = \int_{r_n}^{\infty} r \sqrt{r^2 - r_n^2} \Phi_n^{(1)}(r) dr, \quad (7,10)$$

причем $\Phi_n^{(1)}(r)$ определяется по (4,25) и

$$A_{nk} = \mu_k \frac{r_{nk}}{\sqrt{r^2 - r_{nk}^2}}.$$

Далее,

$$B_n^{(m)} = \frac{n_n^{(1)2}}{\pi^2} h_n^{(1)} \left\{ L_n^{(m)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} J_n^{(m-1)} + \sqrt{\pi h_n^{(1)}} J_n^{(m+1)} \right\}, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (7,11)$$

$$C_{nk}^{(m)} = \frac{n_n^{(1)2}}{\pi^2} h_n^{(1)} \left\{ L_{nk}^{(m)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} J_{nk}^{(m-1)} + \sqrt{\pi h_n^{(1)}} J_{nk}^{(m+1)} \right\}, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (7,12)$$

где

$$L_n^{(m)} = r_n^{m-1} L_n^{(1)} + \frac{m-1}{4h_n^{(1)}} L_n^{(m-2)}, \quad (7,13)$$

$$L_{nk}^{(m)} = r_{nk}^{m-1} L_{nk}^{(1)} + \frac{m-1}{4h_n^{(1)}} L_{nk}^{(m-2)}, \quad (7,14)$$

$$J_n^{(m)} = r_n^{m-1} P_n^{(0)} + \frac{m-1}{2h_n^{(1)}} J_n^{(m-2)} + \frac{1}{\sqrt{\pi h_n^{(1)}}} L_n^{(m-1)}, \quad (7,15)$$

$$J_{nk}^{(m)} = r_{nk}^{m-1} P_{nk}^{(0)} + \frac{m-1}{2h_n^{(1)}} J_{nk}^{(m-2)} + \frac{1}{\sqrt{\pi h_n^{(1)}}} L_{nk}^{(m-1)}. \quad (7,16)$$

(7,13)—(7,16) выражаются последовательно через

$$\begin{aligned} L_n^{(0)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} \left[1 - \operatorname{erf} \left(r_n \sqrt{2h_n^{(1)}} \right) \right], \\ L_{nk}^{(0)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} \left[1 - \operatorname{erf} \left(r_{nk} \sqrt{2h_n^{(1)}} \right) \right], \\ L_n^{(1)} &= \frac{1}{4h_n^{(1)}} e^{-2h_n^{(1)} r_n^2}, \quad L_{nk}^{(1)} = \frac{1}{4h_n^{(1)}} e^{-2h_n^{(1)} r_{nk}^2}, \\ J_n^{(0)} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} \left\{ 1 - \left[\operatorname{erf} \left(r_n \sqrt{h_n^{(1)}} \right) \right]^2 \right\}, \\ J_{nk}^{(0)} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} \left\{ 1 - \left[\operatorname{erf} \left(r_{nk} \sqrt{h_n^{(1)}} \right) \right]^2 \right\}, \\ P_n^{(0)} &= \frac{1}{2h_n^{(1)}} e^{-h_n^{(1)} r_n^2} \operatorname{erf} \left(r_n \sqrt{h_n^{(1)}} \right), \\ P_{nk}^{(0)} &= \frac{1}{2h_n^{(1)}} e^{-h_n^{(1)} r_{nk}^2} \operatorname{erf} \left(r_{nk} \sqrt{h_n^{(1)}} \right), \end{aligned} \quad (7,17)$$

где $h_n^{(1)}$ вычисляются по (4,13). Как следует из (7,8)—(7,12) $B_n^{(m)}$ и E_n являются просто числами, в то время как $D_{nk}^{(m)}$, $G_{nk}^{(m)}$ и $C_{nk}^{(m)}$ зависят от параметра λ . Оставшиеся интегралы по r (7,8)—(7,10) надо взять численно.

§ 8. Расчет примеров и результаты

На рис. 8 нанесены графики безразмерных величин (отнесенных к величинам в невозмущенном потоке) частоты ударов N^* молекул о пластинку, касательного импульса p_x^* и энергии E^* , передаваемых молекулами пластинке, в зависимости от λ , где

$$\lambda = \frac{x}{y_0}, \quad 0 < y_0 < h^{-\frac{1}{2}}, \quad h = \frac{5}{6} M^2,$$

$$N^* = h^* N^{(2)}, \quad p_x^* = \frac{1}{2} p_*^{(2)} h^*, \quad E^* = h^* E^{(2)}, \quad h^* = 2 \sqrt{\pi h},$$

причем $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$ определяются по (6,9)—(6,11). Расчет N^* , p_x^* и E^* проводился по формулам (6,9)—(6,11) при разных значениях λ ,

причем входящие в эти формулы простые интегралы (7,8)—(7,10) вычислялись численно по методу Гаусса [7]. В результате этих расчетов, достаточно громоздких, были получены вышеуказанные кривые.

Из этих графиков видно, что N^* , p_x^* , E^* при $0 \leq \lambda < 1$ сначала почти постоянны, а потом убывают. При $\lambda = 1$ достигается минимум этих величин. В промежутке $1 \leq \lambda \leq 5$ эти функции резко возрастают, а потом дальше вниз по потоку их значения выравниваются.

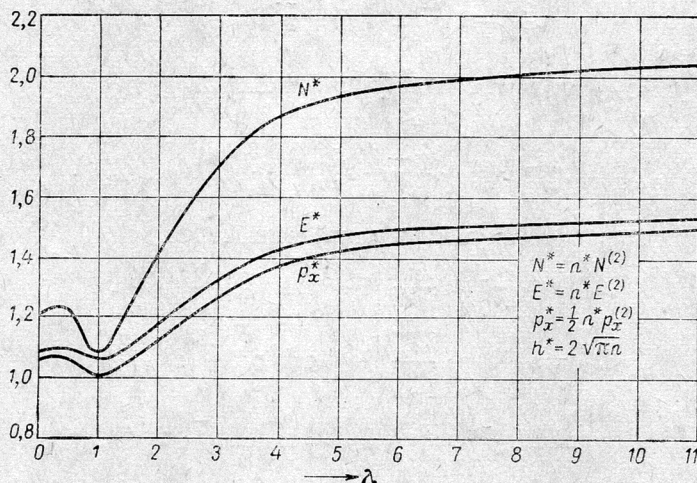


Рис. 8.

Наличие минимума функций N^* , p_x^* , E^* в окрестности точки $\lambda = 1$ (т. е. при $x \approx y_0$) может быть обусловлено тем, что мы рассматривали только однократные столкновения и, так как M велико, набегающий поток в окрестности точки $x = 0$ отбрасывает только что образовавшийся поток отраженных частиц чуть дальше вниз по потоку (где сразу наблюдается резкое возрастание рассматриваемых величин). Их постоянство у самой кромки пластинки может быть обусловлено тем, что там просто еще не существует отраженный поток и вклад в значения функций N^* , p_x^* , E^* получается только от набегающих частиц.

Короче говоря, за появление минимума функций N^* , p_x^* , E^* в окрестности точки $\lambda = 1$ отвечает эффект загораживания набегающих молекул потоком отраженных частиц. Можно ожидать, что при рассмотрении двух-, трехкратных и т. д. столкновений этот эффект ослабляется, так как в этом случае меньше молекул падает на пластинку, следовательно, меньше отражается и меньше загораживается. Таким образом, можно предполагать, что в дальнейших приближениях минимум функций N^* , p_x^* , E^* при $\lambda = 1$ выравнивается и значения этих функций при $0 \leq \lambda \leq 5$ возрастают от передней кромки пластинки вниз по потоку.

Проведем качественное сравнение полученных результатов с другими работами [8]—[16]. Мы проводим именно качественное сравнение, так как в указанных работах были получены потоки импульса и энергии на полубесконечной пластинке при различных M и температурах торможения, в то время как в данной работе эти величины были получены в зависимости от параметра λ . Надо отметить что во всех этих работах исследуется взаимодействие ударной волны с по-

граничным слоем. У нас ударная волна не образуется, так как пластинка бесконечно тонка. В теоретических работах авторы пользовались либо обычными уравнениями для пограничного слоя [8], [9], [13], либо строили полуэмпирическую теорию [15], основываясь на экспериментальных фактах [14], [16]. При таком подходе было затруднительно исследовать поведение потоков массы, импульса и энергии в окрестности передней кромки пластинки, так как там возникает область течения со скольжением или зона единичных столкновений. Здесь исследования должны проводиться уже с кинетической точки зрения. Таким образом, в указанных работах были получены кривые для отношения давления на поверхности к давлению в невозмущенном потоке [12], [13] и для коэффициента теплообмена [14]—[16] в зависимости от x , начиная с некоторого расстояния x_0 от носка пластинки при различных M и температурах торможения. В точке $x = x_0$ эти функции имеют максимальное значение, потом дальше вниз по потоку эти величины убывают. Например, в экспериментальной работе [12] первое отверстие для отбора давления расположено на расстоянии $x = 4,9$ мм от передней кромки.

Существуют разные предположения о поведении потоков импульса и энергии в области $0 \leq x \leq x_0$ [12], [14]—[16]. Так, в [12] показано, что по данным тепловых фотографий отношение давлений на передней кромке, вычисленное по углу наклона ударной волны, значительно ниже отношения давлений в точке x_0 , расположенной несколько дальше по потоку за передней кромкой. То же самое получается для коэффициента теплообмена [14]. Отсюда делается вывод, что, начиная от передней кромки, отношение давлений на пластинке увеличивается до некоторого максимального значения в точке, лежащей несколько дальше вниз по потоку, а потом убывает. В [15], [16] на основе полученного там соотношения для местных чисел Стантона делается вывод, что в зависимости от M набегающего потока значения тепловых потоков в зоне единичных столкновений могут или убывать (при малых M), или возрастать (при больших M) при удалении от передней кромки. Вид кривых этих величин в зависимости от x при $0 \leq x \leq x_0$ этими исследователями не был найден.

Имеет место хорошее качественное совпадение полученных в данной работе кривых (кроме области $0 \leq \lambda \leq 1$) с результатами работы М. Н. Когана и А. М. Дегтярева [17]. В этой работе получены кривые для потоков импульса и энергии на бесконечной тонкой пластинке бесконечного размаха длиной L при больших M . Расчет проводился численно по методу Монте-Карло на основе уравнения Больцмана в рамках однократных столкновений при различных M и Kn . Из этих кривых видно, что потоки импульса и энергии возрастают вдоль пластины от передней кромки, причем это возрастание очень резко при малых x , а потом дальше вниз по потоку значения этих величин выравниваются.

Summary

The gas macroparameter fluxes near the leading edge of a plate are investigated as the second iteration of the integral kinetic operator of a monoatomic rarefied gas for large M .

ЛИТЕРАТУРА

1. «Аэродинамика разреженных газов». Сб. 1, под ред. С. В. Валландера. Изд. ЛГУ, 1963.
2. Р. Г. Баранцев, Ю. Шлажа. К асимптотической структуре пограничного слоя при больших M . Вестник ЛГУ, № 19, 1964.

3. Ю. Шлажа. Метод моментов при гиперзвуковом обтекании тел разреженным газом. Вестник ЛГУ, № 13, 1966.
4. a) Rarefied gas dynamics. Proc. of the 1 Intern. Symp. held at Nice. New York, Pergamon Press, 1960; b) Rarefied gas dynamics. Proc. of the 2 Intern. Symp. held at the Univ. of California, 1960. New York, Acad. Press, 1961; c) Rarefied gas dynamics. Proc. of the 13 Intern. Symp. held at the Paris, 1962, vol. I, II. New York, Acad. Press, 1963.
5. J. Szlaža. Hyperschallumströmung einer unendlichen Platte durch verdünntes Gas. Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1966 (im Druck).
6. Н. Г. де Брёйн. Асимптотические методы в анализе. М., ИЛ, 1961.
7. П. В. Мелентьев. Приближенные вычисления. М., Физматгиз, 1962.
8. В. С. Галкин. Исследование обтекания плоской пластины гиперзвуковым потоком вязкого слаборазреженного газа. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1961.
9. В. П. Мясников. Ламинарный пограничный слой на пластине в сверхзвуковом потоке слаборазреженного газа. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1959.
10. Г. Нагамацу. Высокотемпературное разреженное гиперзвуковое течение около плоской пластины. ARS J., 31, № 7, 1961.
11. Nagamatsu, Li. On hypersonic flow near the leading edge of a flat plate. Phys. Fluids, 3, No 1, 1960.
12. Г. Нагамацу, Р. Шир. Взаимодействие ударной волны с пограничным слоем и скольжение у передней кромки плоской пластины в гиперзвуковом потоке. В сб.: «Некоторые задачи современной аэродинамики». М., ИЛ, 1961.
13. А. Г. Хэммит. Влияние вязкости на гиперзвуковое обтекание плоской пластины с конечной передней кромкой. Механика, № 5, 1959.
14. Г. Нагамацу, Вейл, Р. Шир. Теплообмен на плоской пластине в потоке разреженного газа при очень больших числах Маха и высоких температурах. Ракетная техника, № 4, 1962.
15. Ю. А. Кошмаров. Полуэмпирическая теория теплообмена тонкой пластины, обтекаемой разреженным газом, при больших числах Маха. Тепло- и массоперенос, т. II. Минск, 1965.
16. Ю. А. Кошмаров, Н. М. Горская. Теплообмен пластины в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Тепло- и массоперенос, т. II. Минск, 1965.
17. М. Н. Коган. Динамика разреженных газов. Труды II Всесоюзного съезда по механике. Обзорные доклады. Вып. 2, 263—279, 1965.

Статья поступила в редакцию 21 ноября 1966 г.