J. Szlaža

Die Bewegung eines Flüssigkeitstropfens in einem Zweiphasenmedium

Bei den in der chemischen Verfahrenstechnik wichtigen Prozessen der Emulsionierung, Homogenisierung und Extraktion hat man es häufig mit der Bewegung von Flüssigkeitströpfchen in einem Substanzgemisch und mit Stoffübergangsprozessen an Flüssigkeitströpfchen zu tun. Zur Behandlung der Diffusionsprobleme, die zum Beispiel bei der Extraktion auftreten, muß man die Geschwindigkeitsverteilungen für die Bewegung von Flüssigkeitströpfchen in einem Mehrphasenmedium kennen. In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit der Bestimmung der Geschwindigkeiten für die einzelnen Phasen und des Gemisches für den Fall der Bewegung eines Flüssigkeitströpfchens in einem Zweiphasenmedium. Ausgegangen wird dabei von den Untersuchungen aus [1] und es wird die Lösung des hydrodynamischen Problems der Umströmung eines Flüssigkeitstropfens durch ein Zweiphasenmedium für $Re_i << 1$ angegeben. Es werden Formeln für die Geschwindigkeiten der Phasen, des Gemisches und der Flüssigkeit innerhalb des Tropfens sowie für die Drücke und die Widerstandskraft hergeleitet. Danach wird die Fallbewegung eines Flüssigkeitstropfens in einem Zweiphasenmedium untersucht und mit den Ergebnissen der Fallbewegung eines festen Partikels verglichen. Schließlich werden auf Grund der erhaltenen Resultate einige Aussagen über die Bewegung von Gasblasen in flüssigen Substanzgemischen gemacht.

1. Problemstellung

Ein kugelförmiges Flüssigkeitströpfchen mit dem Radius a befinde sich in der stationären laminaren Strömung eines Zweiphasenmediums, wobei das Flüssigkeitströpfchen sich mit dem Substanzgemisch nicht vermischen soll. Die Gemischkomponenten besitzen im Unendlichen die nach Betrag und Richtung (x-Achse) konstanten Geschwindigkeiten U_i . Die wirklichen und reduzierten Dichten der einzelnen Phasen, ρ_i^* und ρ_i , sowie die Dichte des Flüssigkeitstropfens ρ' seien konstant. Die Porositäten $\varkappa_i = \frac{\rho_i}{\rho_i^*}$ sind dann ebenfalls konstant. Die Zähigkeiten der beiden Phasen und des Flüssigkeitstropfens seien entsprechend μ_i und μ' . Wir setzen voraus, daß der Wechselwirkungskoeffizient K für das Zweiphasenmedium konstant ist.

Wir betrachten nun die Bewegung eines derart kleinen Flüssigkeitströpfchens in einem Zweiphasenmedium, daß man die Strömung als zäh ansehen kann, d.h. es sei $Re_i \ll 1$. Durch die Strömung bedingt, wird dem Zweiphasenmedium die Geschwindigkeit $\vec{v} = \varkappa_1\vec{v}_1 + \varkappa_2\vec{v}_2$ erteilt, wobei $\vec{v}_i$ die Geschwindigkeiten der Phasen sind, und der Flüssigkeit innerhalb des Tropfens die Geschwindigkeit $\vec{v}'$. Dabei soll sich der Flüssigkeitstropfen nicht deformieren und die sphärische Gestalt beibehalten.

Die Bewegungs- und Kontinuitätsgleichungen für das Zweiphasenmedium und der Flüssigkeit innerhalb des Tropfens haben dann die Form [1]

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{grad} p_i = \mu_i \Delta \vec{v}_i + \frac{K}{\varkappa_i} \sum_{j=1}^{2} (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \qquad i=1,2 \\ &\operatorname{div} \vec{v}_i = 0 \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{grad} p' = \mu' \Delta \vec{v}' \\ &\operatorname{div} \vec{v}' = 0 \end{aligned}$$

wobei p_i die Drücke der Phasen und p' der Druck im Flüssigkeitstropfen sind.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$, $\vec{v}$, $\vec{v}'$ und der Drücke p_i und p' ist das Gleichungssystem (1)-(2) zu lösen unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen. Wie sehen nun diese Randbedingungen aus?

Infolge der Symmetrie der Aufgabe ist es zweckmäßig zu sphärischen Koordinaten (r, Θ, φ) überzugehen mit dem Koordinatenursprung im Zentrum des Flüssigkeitstropfens. Wegen der Symmetrie der Bewegung bezüglich der x-Achse sind die Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$ und $\vec{v}'$ vom Winkel φ unabhängig, d.h. sie besitzen die Komponenten $v_r^{(i)}(r, \Theta)$, $v_\Theta^{(i)}(r, \Theta)$, $v_r'(r, \Theta)$, $v_\Theta'(r, \Theta)$.
Demnach ergeben sich in weiter Entfernung vom Flüssigkeitstropfen für die einzelnen Phasen des Substanzgemisches folgende Bedingungen

(3) $$v_r^{(i)} = U_i \cos\Theta \qquad v_\Theta^{(i)} = -U_i \sin\Theta \qquad \text{für} \quad r \to \infty$$

Da nach Voraussetzung der Flüssigkeitstropfen sich nicht deformiert und nicht mit dem Zweiphasenmedium vermischt, gelten an der Oberfläche des Tropfens die Bedingungen

(4) $$v_r^{(i)} = v_r' = 0 \qquad \text{für} \quad r = a$$

In allen Punkten innerhalb des Tropfens müssen natürlich die Geschwindigkeiten v_r' und v_Θ' endliche Werte annehmen, so auch im Zentrum des Flüssigkeitstropfens. Somit erhalten wir eine weitere Randbedingung, nämlich

(5) v_r' und v_Θ' sind endlich für $r = 0$

Auf der Grenzfläche zwischen dem Flüssigkeitstropfen und dem Zweiphasenmedium ist die Bedingung

(6) $$v_\Theta^{(i)} = v_\Theta' \qquad \text{für} \quad r = a$$

erfüllt, d.h. zwischen der Flüssigkeit im Tropfen und dem Zweiphasenmedium gibt es keine Gleitbewegung. Diese Tatsache ist recht gut bekannt aus experimentellen Untersuchungen und zum anderen erhält man aus (6) unmittelbar die Haftbedingungen, wenn man den Grenzübergang von einem Flüssigkeitströpfchen zu einem festen Partikel vollzieht.

Auf der Oberfläche des Flüssigkeitstropfens sind noch zwei weitere Bedingungen erfüllt, nämlich auf der Grenzfläche müssen die Normal- und Tangentialkomponenten des Spannungstensors stetig bleiben. Demnach ergibt sich unter Berücksichtigung von (4)

$$
(7) \quad \begin{aligned}
& -p + 2\mu_G \frac{\partial v_r}{\partial r} = -p' + 2\mu' \frac{\partial v_r'}{\partial r} && \text{für} \quad r = a \\
& \mu_G \left(\frac{\partial v_\Theta}{\partial r} - \frac{v_\Theta}{r} \right) = \mu' \left(\frac{\partial v_\Theta'}{\partial r} - \frac{v_\Theta'}{r} \right) && \text{für} \quad r = a
\end{aligned}
$$

wobei v_r, v_Θ, μ_G entsprechend die Geschwindigkeitskomponenten und die Zähigkeit des Zweiphasenmediums sind. Wie aus (3)-(7) zu ersehen ist, können bis auf (7) Randbedingungen für die einzelnen Phasen angegeben werden. Die Bedingung (7) bezieht sich auf das gesamte Zweiphasenmedium und hier tritt auch die Zähigkeit des Substanzgemisches μ_G in Erscheinung, die von vornherein nicht als gegeben angesehen wird. Im weiteren wird gezeigt, wie man in unserem Falle μ_G bestimmen kann.

Das Problem, mit dem wir uns nun befassen werden, besteht in der Lösung des Gleichungssystems (1)-(2) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (3)-(7).

2. Bestimmung der Geschwindigkeiten und Drücke der einzelnen Phasen, des Substanzgemisches und der Flüssigkeit innerhalb des Tropfens

Zunächst betrachten wir das Gleichungssystem (2) für die Bewegung innerhalb des Flüssigkeitstropfens

$$\operatorname{grad} p' = \mu' \Delta \vec{v}'$$
$$\operatorname{div} \vec{v}' = 0$$

Gehen wir in diesem Gleichungssystem zu sphärischen Koordinaten über, so kann man die Lösung des Systems in der Gestalt

$$v_r' = f(r) \cos \Theta$$
$$v_\Theta' = - g(r) \sin \Theta$$
$$p' = \mu' h(r) \cos \Theta$$

suchen. Im Ergebnis erhalten wir [2]

$$f(r) = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2$$

$$g(r) = - \frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2\,Dr^2$$

$$h(r) = \frac{B}{r^2} + 10\,Dr$$

Setzen wir diese Funktionen in die Ausdrücke für v_r', v_Θ', p' ein und berücksichtigen dabei die Randbedingungen (4) und (5), dann gelangen wir zu folgenden Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck der Flüssigkeit innerhalb des Tropfens

$$\begin{aligned} v_r' &= D(r^2 - a^2) \cos \Theta \\ v_\Theta' &= - D(2r^2 - a^2) \sin \Theta \qquad (8) \\ p' &= 10\,\mu' Dr \cos \Theta \end{aligned}$$

Der Koeffizient D muß im weiteren noch ermittelt werden.

Das Gleichungssystem für die Bewegung des Zweiphasenmediums außerhalb des Flüssigkeitstropfens ist durch (1) gegeben

$$\operatorname{grad} p_i = \mu_i \Delta \vec{v}_i + \frac{K}{\varkappa_i} \sum_{j=1}^{2} (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \qquad i = 1,2$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_i = 0$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich in der Gestalt

$$\operatorname{grad} p_i + \mu_i \operatorname{rot} \vec{\Omega}_i = \frac{K}{\varkappa_i} \sum_{j=1}^{2} (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \tag{9}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_i = 0$$

schreiben, wobei

$$\vec{\Omega}_i = \operatorname{rot} \vec{v}_i \tag{10}$$

ist. Die weiteren Ausführungen basieren auf den Resultaten aus [1]. Durch die Anwendung der Operation rot auf (9) gelingt es, das Gleichungssystem zu entkoppeln und wir erhalten zwei Gleichungen zur Bestimmung von $\vec{\phi}_1$ und $\vec{\phi}_2$, nämlich

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\phi}_1 = 0 \tag{11}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\phi}_2 + \gamma^2 \vec{\phi}_2 = 0$$

wobei

$$\vec{\phi}_1 = \frac{\vec{\Omega}_1}{K_1} + \frac{\vec{\Omega}_2}{K_2}$$

$$\vec{\phi}_2 = \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1$$

$$\gamma = \sqrt{K_1 + K_2} \tag{12}$$

$$K_i = \frac{K}{\varkappa_i \mu_i}$$

sind. Wie in [1] gezeigt wurde, lassen sich die Gleichungen (11) exakt lösen und wir erhalten

$$(13)\qquad \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{A \sin \Theta}{r^2} \\ \phi_2 &= B(\gamma r+1)\,\frac{e^{-\gamma r}}{r^2}\,\sin \Theta \end{aligned}$$

Die Konstanten A und B werden bei den weiteren Untersuchungen ermittelt. Unter Berücksichtigung von (12) und (13) können wir nun aus (10) die Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$ bestimmen.
Dabei gelangen wir zu folgenden Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r u_\Theta^{(1)}) - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \Theta}\right] &= \frac{A \sin \Theta}{r^2} \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r u_\Theta^{(2)}) - \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \Theta}\right] &= B(\gamma r+1)\,\frac{e^{-\gamma r}}{r^2}\,\sin \Theta \end{aligned}$$

wobei

$$(15)\qquad \begin{aligned} u_\tau^{(1)} &= \frac{v_\tau^{(1)}}{K_1} + \frac{v_\tau^{(2)}}{K_2} \\ u_\tau^{(2)} &= v_\tau^{(2)} - v_\tau^{(1)} \end{aligned} \qquad \tau = r\,,\,\Theta$$

sind. Die Kontinuitätsgleichung hat die Gestalt

$$(16)\qquad \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial(r^2 u_r^{(i)})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \Theta}\,\frac{\partial(u_\Theta^{(i)} \sin \Theta)}{\partial \Theta} = 0$$

Wie aus (14)-(16) zu ersehen ist, sind zur Bestimmung von $u_\tau^{(i)}$ folgende zwei Aufgaben zu lösen:

a) Gesucht werden die $u_\tau^{(1)}$ aus den Gleichungen

$$(17)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\; r\, u_\Theta^{(1)}) - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \Theta}\right] = \frac{A \sin \Theta}{r^2} \\ &\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r^{(1)}) + \frac{1}{r \sin \Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}(u_\Theta^{(1)} \sin \Theta) = 0 \end{aligned}$$

Hierbei sind gemäß (3), (4), (6) und (15) die Randbedingungen

$$(18)\quad \begin{aligned} &u_r^{(1)} = 0 \qquad u_\Theta^{(1)} = \frac{\gamma^2}{K_1 K_2} v_\Theta' \qquad \text{für } r = a \\ &u_r^{(1)} = U^* \cos \Theta \quad u_\Theta^{(1)} = - U^* \sin \Theta \qquad \text{für } r \to \infty \end{aligned}$$

zu berücksichtigen, wobei

$$(19)\quad U^* = \frac{U_1}{K_1} + \frac{U_2}{K_2}$$

ist.

b) Gesucht werden die $u_\tau^{(2)}$ aus den Gleichungen

$$(20)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, u_\Theta^{(2)}) - \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \Theta}\right] = B(\gamma r+1)\, \frac{e^{-\gamma r}}{r^2} \sin \Theta \\ &\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r^{(2)}) + \frac{1}{r \sin \Theta}\;\frac{\partial}{\partial \Theta}(u_\Theta^{(2)} \sin \Theta) = 0 \end{aligned}$$

Dabei gelten wegen (3), (4), (6) und (15) die Randbedingungen

$$(21)\quad \begin{aligned} &u_r^{(2)} = 0 \qquad u_\Theta^{(2)} = 0 \qquad \text{für } r = a \\ &u_r^{(2)} = \bar{U} \cos \Theta \qquad u_\Theta^{(2)} = - U \sin \Theta \qquad \text{für } r \to \infty \end{aligned}$$

wobei

(22) $$\bar{U} = U_2 - U_1$$

ist.

Die Aufgabe b) ist in [1] ausführlich behandelt worden und wir können die Lösung sofort hinschreiben.

(23)
$$u_r^{(2)} = \bar{U} \{ 1 - \frac{a^3}{r^3} (1 + \frac{3}{\gamma a} + \frac{3}{\gamma^2 a^2}) + 3 \frac{a}{r} e^{-\gamma(r-a)} (\frac{1}{\gamma r} + \frac{1}{\gamma^2 r^2}) \} \cos \Theta$$
$$u_\Theta^{(2)} = - \bar{U} \{ 1 + \frac{a^3}{2r^3}(1 + \frac{3}{\gamma a} + \frac{3}{\gamma^2 a^2}) - \frac{3}{2} \frac{a}{r} e^{-\gamma(r-a)} (1 + \frac{1}{\gamma r} + \frac{1}{\gamma^2 r^2}) \sin \Theta$$

Bei der Lösung der Aufgabe a) gelangen wir zu folgenden Ausdrücken für $u_\tau^{(1)}$ (siehe [1])

(24)
$$u_r^{(1)} = \{ U^* + \frac{A}{r} + \frac{a_3}{r^3} \} \cos \Theta$$
$$u_\Theta^{(1)} = \{ - U^* - \frac{A}{2r} + \frac{a_3}{2r^3} \} \sin \Theta$$

Bis hierher haben wir in (24) nur die Randbedingungen (18) für $r \to \infty$ berücksichtigt. Betrachten wir nun aus (18) die Randbedingung $u_r^{(1)} = 0$ für $r = a$, so erhalten wir folgende Formeln für $u_\tau^{(1)}$:

(25)
$$u_r^{(1)} = \{ U^* (1 - \frac{a^3}{r^3}) + \frac{A}{r} (1 - \frac{a^2}{r^2}) \} \cos \Theta$$
$$u_\Theta^{(1)} = - \{ U^* (1 + \frac{a^3}{2r^3}) + \frac{A}{2r} (1 + \frac{a^2}{r^2}) \} \sin \Theta$$

In (25) muß noch die Konstante A gefunden werden.

Zur vollständigen Lösung des am Schluß von Punkt 1. formulierten Problems müssen die in (8) und (25) vorhandenen Konstanten D und A ermittelt werden. Hierzu haben wir noch drei Randbedingungen zur Verfügung. Das sind einmal die beiden Bedingungen aus (7) und zum anderen aus (18) die Bedingung

$$(26) \qquad u_\Theta^{(1)} = \frac{\gamma^2}{K_1 K_2} v_\Theta' \qquad \text{für} \quad r = a$$

Es ergibt sich somit, daß zur Bestimmung von zwei Konstanten drei Bedingungen vorhanden sind. Es kann also noch eine weitere Konstante ermittelt werden. Hierfür wählen wir den konstanten Wechselwirkungskoeffizient K zwischen den Phasen aus.
Indem wir $u_\Theta^{(1)}$ aus (25) und v_Θ' aus (8) in (26) einsetzen, können wir D nach A ausdrücken. Wir erhalten

$$(27) \qquad D = \frac{\alpha}{a^2} \left(\frac{3}{2} U^* + \frac{A}{a} \right)$$

Durch Auflösung des algebraischen Gleichungssystems (15) gelangen wir zu folgenden Ausdrücken für $v_\tau^{(i)}$:

$$(28) \qquad \begin{aligned} v_\tau^{(1)} &= \frac{K_1}{\gamma^2} (K_2\, u_\tau^{(1)} - u_\tau^{(2)}) \\ v_\tau^{(2)} &= \frac{K_2}{\gamma^2} (K_1\, u_\tau^{(1)} + u_\tau^{(2)}) \end{aligned} \qquad \tau = r, \Theta$$

Die Geschwindigkeit des Zweiphasengemisches erhält man über die Relation

$$\vec{v} = \varkappa_1 \vec{v}_1 + \varkappa_2 \vec{v}_2$$

Demnach gilt wegen (28) für die Geschwindigkeitskomponenten des Substanzgemisches

$$(29) \qquad v_\tau = \alpha\, u_\tau^{(1)} + \beta\, u_\tau^{(2)} \qquad \tau = r, \Theta$$

wobei

$$(30) \qquad \alpha = \frac{K_1 K_2}{\gamma^2} \qquad \beta = \frac{1}{\gamma^2}\,(\varkappa_2\,K_2 - \varkappa_1\,K_1)$$

sind.

Zur Bestimmung der Konstanten A und K kann auf die Bedingungen (7) zurückgegriffen werden. Bevor wir aber dazu übergehen, bestimmen wir noch den Druck p im Zweiphasenmedium.

Nach (9) haben wir die Gleichung

$$\frac{1}{\mu_i}\,\mathrm{grad}\,p_i + \mathrm{rot}\,\vec{\Omega}_i = K_i \sum_{j=1}^{2} (\vec{v}_j - \vec{v}_i)$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen jeweils addieren und subtrahieren, dann gelangen wir zu den Beziehungen

$$(31) \qquad \begin{aligned} \mathrm{grad}\,P_1 &= -\,\mathrm{rot}\,\vec{\phi}_1 \\ \mathrm{grad}\,P_2 &= -\,\mathrm{rot}\,\phi_2 - \gamma^2\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \end{aligned}$$

wobei

$$P_1 = \frac{p_1}{\mu_1\,K_1} + \frac{p_2}{\mu_2\,K_2}$$

$$P_2 = \frac{p_2}{\mu_2} - \frac{p_1}{\mu_1}$$

sind. Lösen wir dieses algebraische Gleichungssystem auf, erhalten wir für p_i

$$(32) \qquad \begin{aligned} p_1 &= \frac{K_1\,\mu_1}{\gamma^2}\,(K_2\,P_1 - P_2) \\ p_2 &= \frac{K_2\,\mu_2}{\gamma^2}\,(K_1\,P_1 + P_2) \end{aligned}$$

Der Druck des gesamten Zweiphasengemisches wird nach der Formel

$$p = \varkappa_1 \, p_1 + \varkappa_2 \, p_2$$

berechnet. Setzen wir also hier p_i aus (32) ein, so ergibt sich

(33) $$p = K \, P_1$$

wobei P_1 sich aus (31) ermitteln läßt. Aus der ersten Beziehung in (31) erhält man die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial P_1}{\partial r} = - \frac{1}{r \sin \Theta} \, \frac{\partial}{\partial \Theta} \, (\psi_1 \sin \Theta)$$

$$\frac{1}{r} \, \frac{\partial P_1}{\partial \Theta} = \frac{1}{r} \, \frac{\partial (r \, \psi_1)}{\partial r}$$

Setzt man hier ψ_1 aus (13) ein und integriert die beiden Gleichungen, dann ergibt sich für P_1 die folgende Formel

$$P_1 = \frac{A}{r^2} \cos \Theta$$

und wir können wegen (33)

(34) $$p = \frac{KA}{r^2} \cos \Theta$$

schreiben.

Nachdem p gefunden wurde, können wir zur Ermittlung von A und K übergehen, indem wir die Bedingungen (7) zur Hilfe nehmen. Bilden wir nach (29) die Ableitungen der Geschwindigkeiten nach r und Θ unter Berücksichtigung von (23) und (25) und setzen die gewonnenen Ausdrücke sowie die Drücke p und p' aus (34) und (8) in (7) ein, dann gelangen wir zu folgendem Gleichungssystem zur Bestimmung von A und K :

(35)
$$- KA + 2\mu_G\alpha(3U^*a + 2A) = - 6\mu'\alpha\,(\tfrac{3}{2}\,U^*a + A)$$
$$\mu_G\,[\,3\alpha(U^*a + A) - \tfrac{3}{2}\,\beta\,\overline{U}\,a(\gamma a + 1)\,] = - 3\mu'\alpha\,(\tfrac{3}{2}\,U^*a + A)$$

Die erste Gleichung aus (35) liefert

(36)
$$A = - \frac{3\alpha U^*a\,(2\mu_G + 3\mu')}{-K + 2\alpha(2\mu_G + 3\mu')}$$

Setzen wir diesen Ausdruck für A in die zweite Gleichung von (35) ein und berücksichtigen dabei die Formeln (12), (19), (22) und (30), dann erhalten wir zur Bestimmung von K die Gleichung

(37)
$$mK + n\sqrt{K} + q = 0$$

wobei

$$m = (2\mu_G + 3\mu')(1 + \frac{2\mu_G}{\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2})\,\frac{\varkappa_1\mu_1\,U_1 + \varkappa_2\mu_2\,U_2}{\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2}$$

(38)
$$n = a\mu_G\,\overline{U}\,\sqrt{\frac{\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2}{\varkappa_1\mu_1\varkappa_2\mu_2}\;\frac{\varkappa_1\varkappa_2(\mu_1 - \mu_2)}{\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2}}$$

$$q = \mu_G\,\overline{U}\,\frac{\varkappa_1\varkappa_2(\mu_1 - \mu_2)}{\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2}$$

sind.

Die Gleichung (37) ist bezüglich $\sqrt{K}$ eine quadratische algebraische Gleichung mit den Lösungen

(39)
$$(\sqrt{K})_{1,2} = \frac{n}{2m}\,[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mq}{n^2}}\,]$$

Nach Voraussetzung ist der Wechselwirkungskoeffizient K konstant und hat nur einen Wert. Welchen der beiden Werte aus (39) nimmt K an? Wir wählen das Vorzeichen vor der Wurzel dergestalt, daß $\sqrt{K} > 0$

ist. Der Ausdruck $1 - \frac{4mq}{n^2}$ muß größer Null sein, da wir sonst einen komplexen Wert für $\sqrt{K}$ bekommen würden. Wir können U_i und μ_i immer so auswählen, daß $n < 0$ ist. Nach (38) wird dann auch $q < 0$. Da $m > 0$ ist, wird $\sqrt{1 - \frac{4mq}{n^2}} > 1$. Wir müssen dann in (39) das Vorzeichen (-) vor die Wurzel setzen, damit $\sqrt{K} > 0$ ist. Es ist also

$$(40) \qquad \sqrt{K} = -\frac{n}{2m}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4mq}{n^2}}\right]$$

Wählen wir in (38) U_i und μ_i dergestalt, daß $n > 0$ ist, dann gilt auch $q > 0$. Es läßt sich leicht zeigen, daß $\sqrt{K} > 0$ dann nicht erfüllt ist.

Unter Berücksichtigung von (38) erhalten wir aus (40) schließlich folgenden Ausdruck für K:

$$(41) \qquad K = \frac{\bar{U}\mu_G \varkappa_1 \varkappa_2 (\mu_1 - \mu_2)(\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2)^2}{4\mu_1\mu_2(2\mu_G + 3\mu')^2(\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2 + 2\mu_G)^2(\varkappa_1\mu_1U_1 + \varkappa_2\mu_2U_2)^2}\Big\{a\sqrt{\mu_G\bar{U}(\mu_1-\mu_2)(\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2)}$$
$$+\sqrt{a^2\bar{U}\mu_G(\mu_1-\mu_2)(\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2) - 4\mu_1\mu_2(2\mu_G+3\mu')(\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2+2\mu_G)(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)}\Big\}^2$$

In den Formeln (36) und (41) ist die Zähigkeit des Zweiphasenmediums μ_G enthalten. Nach Voraussetzung soll μ_G konstant sein. Demzufolge können wir für μ_G den Wert nehmen, den wir erhalten, wenn wir den Grenzübergang von einem Flüssigkeitströpfchen zu einem festen kugelförmigen Teilchen mit dem Radius a vollziehen. Wie in [1] gezeigt wurde, lautet dann die Formel für μ_G

$$(42) \qquad \mu_G = \frac{\varkappa_1\mu_1 U_1 + \varkappa_2\mu_2 U_2}{\varkappa_1 U_1 + \varkappa_2 U_2}$$

Unter Berücksichtigung von (19), (30) und (42) können wir gemäß (27) und (36) die Konstanten A und D in der Form

$$A = \frac{3a}{K} F(\varkappa_i, \mu_i, \mu', U_i)$$

(43)

$$D = \frac{3}{2a^2} G(\varkappa_i, \mu_i, \mu', U_i)$$

schreiben, wobei

$$F(\varkappa_i, \mu_i, \mu', U_i) =$$

$$= \frac{(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)[2(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)+3\mu'(\varkappa_1U_1+\varkappa_2U_2)]}{(\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2)(\varkappa_1U_1+\varkappa_2U_2)-2[2(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)+3\mu'(\varkappa_1U_1+\varkappa_2U_2)]}$$

(44)

$$G(\varkappa_i, \mu_i, \mu', U_i) =$$

$$= \frac{(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)(\varkappa_1U_1+\varkappa_2U_2)}{(\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2)(\varkappa_1U_1+\varkappa_2U_2)-2[2(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)+3\mu'(\varkappa_1U_1+\varkappa_2U_2)]}$$

sind und K sich nach (41) bestimmen läßt.

Indem wir (43) in (8) einsetzen, erhalten wir für die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck innerhalb des Flüssigkeitstropfens folgende Beziehungen:

$$v'_r = \frac{3}{2a^2} G(\varkappa_i, \mu_i, \mu', U_i)(r^2-a^2) \cos\Theta$$

(45)

$$v'_\Theta = -\frac{3}{2a^2} G(\varkappa_i, \mu_i, \mu', U_i)(2r^2-a^2) \sin\Theta$$

$$p' = \frac{15\,\mu' r}{a^2} G(\varkappa_i, \mu_i, \mu', U_i) \cos\Theta$$

Setzen wir A aus (43) in (25) und danach die gewonnenen Ausdrücke in (28) ein und berücksichtigen dabei (23), so gelangen wir zu den nachstehenden Ausdrücken für die Geschwindigkeitskomponenten der einzelnen Phasen

$$
\begin{aligned}
v_r^{(1)} &= \frac{1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2}\{(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)(1-\frac{a^3}{r^3}) + \frac{3a}{r}F(\varkappa_i,\mu_i,\mu',U_i)(1-\frac{a^2}{r^2}) - \\
&\quad - \varkappa_2\mu_2\overline{U}[1-\frac{a^3}{r^3}(1+\frac{3}{\gamma a}+\frac{3}{\gamma^2a^2}) + 3\,\frac{a}{r}\,e^{-\gamma(r-a)}(\frac{1}{\gamma r}+\frac{1}{\gamma^2r^2})]\}\cos\Theta \\
v_\Theta^{(1)} &= \frac{1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2}\{-(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)(1+\frac{a^2}{2r^3}) - \frac{3a}{2r}F(\varkappa_i,\mu_i,\mu',U_i)(1+\frac{a^2}{r^2}) + \\
&\quad + \varkappa_2\mu_2\overline{U}[1+\frac{a^3}{2r^3}(1+\frac{3}{\gamma a}+\frac{3}{\gamma^2a^2}) - \frac{3}{2}\,\frac{a}{r}e^{-\gamma(r-a)}(1+\frac{1}{\gamma r}+\frac{1}{\gamma^2r^2})]\}\sin\Theta \\
v_r^{(2)} &= \frac{1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2}\{(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)(1-\frac{a^3}{r^3}) + \frac{3a}{r}F(\varkappa_i,\mu_i,\mu',U_i)(1-\frac{a^2}{r^2}) + \\
&\quad + \varkappa_1\mu_1\overline{U}[1-\frac{a^3}{r^3}(1+\frac{3}{\gamma a}+\frac{3}{\gamma^2a^2}) + 3\,\frac{a}{r}\,e^{-\gamma(r-a)}(\frac{1}{\gamma r}+\frac{1}{\gamma^2r^2})]\}\cos\Theta \\
v_\Theta^{(2)} &= \frac{1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2}\{-(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)(1+\frac{a^3}{2r^3}) - \frac{3a}{2r}F(\varkappa_i,\mu_i,\mu',U_i)(1+\frac{a^2}{r^2}) - \\
&\quad - \varkappa_1\mu_1\overline{U}[1+\frac{a^3}{2r^3}(1+\frac{3}{\gamma a}+\frac{3}{\gamma^2a^2}) - \frac{3}{2}\,\frac{a}{r}e^{-\gamma(r-a)}(1+\frac{1}{\gamma r}+\frac{1}{\gamma^2r^2})]\}\sin\Theta
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Die Formel (29) liefert uns die Geschwindigkeitskomponenten für das Zweiphasengemisch

$$
\begin{aligned}
v_r &= \frac{1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2}\{(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)(1-\frac{a^3}{r^3}) + \frac{3a}{r}F(\varkappa_i,\mu_i,\mu',U_i)(1-\frac{a^2}{r^2}) + \\
&\quad + \varkappa_1\varkappa_2(\mu_1-\mu_2)\overline{U}[1-\frac{a^3}{r^3}(1+\frac{3}{\gamma a}+\frac{3}{\gamma^2a^2}) + \frac{3a}{r}e^{-\gamma(r-a)}(\frac{1}{\gamma r}+\frac{1}{\gamma^2r^2})]\}\cos\Theta \\
v_\Theta &= \frac{-1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2}\{+(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)(1+\frac{a^3}{2r^3}) + \frac{3a}{2r}F(\varkappa_i,\mu_i,\mu',U_i)(1+\frac{a^2}{r^2}) + \\
&\quad + \varkappa_1\varkappa_2(\mu_1-\mu_2)\overline{U}[1+\frac{a^3}{2r^3}(1+\frac{3}{\gamma a}+\frac{3}{\gamma^2a^2}) - \frac{3}{2}\,\frac{a}{r}e^{-\gamma(r-a)}(1+\frac{1}{\gamma r}+\frac{1}{\gamma^2r^2})]\}\sin\Theta
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Für den Druck im Zweiphasenmedium erhalten wir wegen (34)

(48) $$p = \frac{3a}{r^2} F(\varkappa_i, \mu_i, \mu', U_i) \cos\Theta$$

Wir betrachten noch einige Grenzübergänge. Setzen wir in (45)-(48) $\rho_1 = \rho_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $U_1 = U_2$, so gelangen wir zu Formeln, für die Geschwindigkeiten und Drücke bei der Bewegung eines Flüssigkeitströpfchens in einem homogenen Medium, die man z.B. in [3] finden kann.

Nehmen wir an, daß $\mu' \gg \mu_i$ ist. In diesem Falle haben wir es mit der Bewegung eines festen Partikels in einem Zweiphasenmedium zu tun, und die Ausdrücke (46)-(48) gehen in die entsprechenden Formeln für die Geschwindigkeiten und Drücke über, die in [1] gefunden wurden. Dabei zeigt es sich, daß man die für ein festes Partikel erhaltenen Formeln noch vereinfachen kann.

In der vorliegenden Arbeit konnte in der Umgebung des Flüssigkeitströpfchens der Wechselwirkungskoeffizient K gemäß (41) ermittelt werden. Wie aus (41) zu ersehen ist strebt $K \to 0$, wenn $\mu' \gg \mu_i$ ist. Nach (12) strebt dann auch $\gamma \to 0$. Indem wir nun in (46)-(48) $\mu' \gg \mu_i$ annehmen und den Grenzübergang für $\gamma \to 0$ vollziehen, gelangen wir zu folgenden vereinfachten Formeln für die Bewegung eines festen kugelförmigen Partikels in einem Zweiphasenmedium:

$$v_r^{(1)} = \frac{1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2} \{ (\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2) [1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}] - $$

$$- \varkappa_2\mu_2(U_2-U_1) [(1 - \frac{a^3}{r^3}) + \frac{3a^3}{2r^3} (1 - \frac{r^2}{a^2})] \} \cos\Theta$$

$$v_\Theta^{(1)} = \frac{1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2} \{ - (\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)[1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}] +$$

$$+ \varkappa_2\mu_2(U_2-U_1) [(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}) - \frac{3a^3}{4r^3} (1 - \frac{r^2}{a^2})] \} \sin\Theta$$

$$v_r^{(2)} = \frac{1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2} \{(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)[1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}] +$$

$$+ \varkappa_1\mu_1(U_2-U_1)[(1 - \frac{a^3}{r^3}) + \frac{3a^3}{2r^3} (1 - \frac{r^2}{a^2})]\} \cos\Theta$$

$$v_\Theta^{(2)} = \frac{1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2} \{ - (\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)[1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}] -$$

$$- \varkappa_1\mu_1(U_2-U_1)[(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}) - \frac{3a^3}{4r^3} (1 - \frac{r^2}{a^2})]\} \sin\Theta$$

(49)
$$v_r = \frac{1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2} \{(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)[1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}] +$$

$$+ \varkappa_1\varkappa_2(\mu_1-\mu_2)(U_2-U_1)[(1 - \frac{a^3}{r^3}) + \frac{3a^3}{2r^3} (1 - \frac{r^2}{a^2})]\} \cos\Theta$$

$$v_\Theta = \frac{-1}{\varkappa_1\mu_1+\varkappa_2\mu_2} \{(\varkappa_1\mu_1U_1+\varkappa_2\mu_2U_2)[1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}] +$$

$$+ \varkappa_1\varkappa_2(\mu_1-\mu_2)(U_2-U_1)[(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}) - \frac{3a^3}{4r^3} (1 - \frac{r^2}{a^2})]\} \sin\Theta$$

$$p = - \frac{3a}{2r^2} (\varkappa_1\mu_1U_1 + \varkappa_2\mu_2U_2) \cos\Theta$$

Aus (49) ist zu ersehen, daß bei der Bewegung einer Kugel in einem Zweiphasenmedium die Geschwindigkeiten und der Druck vom Wechselwirkungskoeffizient K unabhängig sind.

3. Die Fallbewegung eines Flüssigkeitstropfens in einem Zweiphasenmedium

Wir betrachten zunächst die Fallbewegung eines festen kugelförmigen Teilchens in einem Zweiphasenmedium, die mit der Geschwindigkeit U erfolgt.

Es seien ρ' - die Dichte des festen Teilchens, ρ_i^* - die Dichte der Komponenten des Zweiphasenmediums und ρ_G - die Dichte des

Substanzgemisches. Dann ist

$$\rho_G = \varkappa_1\rho_1^* + \varkappa_2\rho_2^* = \rho_1 + \rho_2$$

wobei ρ_i - die reduzierten Dichten der Komponenten sind.
Wenn S - die auf das Teilchen wirkende Schwerkraft, A - die Archimedische Auftriebskraft und F - die Stokessche Widerstandskraft sind, dann gilt

(50) $$S = A + F$$

Nun sind aber

(51) $$S = \frac{4}{3}\pi\rho' a^3 g \qquad A = \frac{4}{3}\pi\rho_G a^3 g$$

und gemäß [1]

(52) $$F = 6\pi a\,(\varkappa_1\mu_1 U_1 + \varkappa_2\mu_2 U_2)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (50) ein und berücksichtigen dabei, daß $U_1 = U_2 = U$ ist, dann gelangen wir nach einfachen Umformungen zu folgender Formel für die Geschwindigkeit eines festen kugelförmigen Teilchens bei der Fallbewegung in einem Zweikomponentenmedium

(53) $$U = \frac{2}{9}\cdot\frac{a^2 g\,[\rho' - (\varkappa_1\rho_1^* + \varkappa_2\rho_2^*)]}{\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2}$$

Sind hier $\rho_1^* = \rho_2^*$ und $\mu_1 = \mu_2$, so erhalten wir die weitbekannte Stokessche Formel für ein homogenes Medium.
Wir befassen uns nun mit der Fallbewegung eines Flüssigkeitstropfens in einem Zweiphasenmedium. Hierzu bestimmen wir erst einmal die Widerstandskraft F, die auf den Flüssigkeitstropfen bei seiner Umströmung durch ein Zweiphasenmedium wirkt. Es ist [2]

$$F = \iint\limits_{(S)} (p_{rr} \cos\Theta - p_{r\Theta} \sin\Theta)\, dS =$$

(54)

$$= \int\limits_0^{\pi} (p_{rr} \cos\Theta - p_{r\Theta} \sin\Theta)\, 2\pi a^2 \sin\Theta\, d\Theta$$

wobei

$$p_{rr}\big|_{r=a} = -p + 2\mu_G \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\Big|_{r=a}$$

$$p_{r\Theta}\big|_{r=a} = \mu_G \left(\frac{\partial v_\Theta}{\partial r} - \frac{v_\Theta}{r}\right)\Big|_{r=a}$$

sind. Unter Berücksichtigung von (47) und (48) erhalten wir nach Integration aus (54)

(55)

$$F = \frac{4}{3}\pi a\left\{ \frac{3(\varkappa_1\mu_1 U_1 + \varkappa_2\mu_2 U_2)(2\mu_G + 3\mu')(2\mu_G + \varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2)}{[-(\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2) + 2(2\mu_G + 3\mu')](\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2)} + 3ß(U_2 - U_1)\mu_G(\gamma a + 1) \right\}$$

wobei γ, ß und μ_G sich nach (12), (30) und (42) ermitteln lassen. Die Geschwindigkeit U des Flüssigkeitstropfens bei seiner Fallbewegung in einem Zweiphasenmedium können wir aus (50) bestimmen, indem wir $U_1 = U_2 = U$ annehmen, (51) und (55) in (50) einsetzen und nach U auflösen. Wir erhalten

$$U = \frac{2a^2 g\,[\rho' - (\rho_1 + \rho_2)][\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2 + \mu']}{3(\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2)[2(\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2) + 3\mu']} \qquad (56)$$

Setzen wir in (55) und (56) $\rho_1^* = \rho_2^*$, $\mu_1 = \mu_2$, $U_1 = U_2$, so gelangen wir zu den bekannten Formeln von Rybczynski [4] und Hadamard [5] für die Fallbewegung eines Flüssigkeitstropfens in einem homogenen Medium. Nehmen wir an, daß $\mu' \gg \mu_i$ ist, dann gehen die Formeln (55) und (56) in die Formeln (52) und (53) für die Fallbewegung eines festen kugelförmigen Teilchens in einem Zweiphasenmedium über.

4. Einige Bemerkungen zur Bewegung von Gasbläschen in einem Zweikomponentenmedium

Die Bewegung von Gasblasen in flüssigen Mehrkomponentenmedien ist von großem Interesse, da man einerseits durch diese Prozesse wesentliche Informationen über die Eigenschaften der Phasengrenzen Gas - Flüssigkeit erhalten kann und sie zum anderen von ausschlaggebender Bedeutung für solche technologischen Prozesse wie z.B. der Flotation bei der Aufbereitung von Erzen oder der pneumatischen Mischung in der Nahrungsmittelindustrie ist.

Die Bewegung einer Gasblase in einem flüssigen Zweikomponentenmedium ist eng mit der Bewegung eines Flüssigkeitstropfens in einem Zweikomponentenmedium verknüpft, die in den Punkten 1.- 3. ausführlich behandelt wurde. Falls wir es mit kleinen kugelförmigen Gasbläschen zu tun haben, dann sind die Reynoldszahlen ebenfalls klein und die Bewegung des Zweikomponentenmediums in der Nähe der Gasblasenoberfläche kann als zäh angesehen werden.

Die Geschwindigkeit der Aufwärtsbewegung einer Gasblase in einem Zweikomponentenmedium kann nach der Formel (56) ermittelt werden, indem wir μ' und ρ' gegenüber μ_i und ρ_i vernachlässigen. Wir erhalten

$$U = -\frac{1}{3}\,\frac{a^2 g\,(\varkappa_1\rho_1^* + \varkappa_2\rho_2^*)}{\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2} = -\frac{1}{3}\,\frac{a^2 g}{\nu_G} \tag{57}$$

wobei das Minuszeichen darauf hinweist, daß eine Auwärtsbewegung vorliegt. Sind in (57) $\rho_1^* = \rho_2^*$, $\mu_1 = {}_2$, dann gelangen wir zu der bekannten Formel für die Bewegung einer Gasblase in einem Einkomponentenmedium. Die Formel (57) ist anwendbar für $Re \ll 1$, d.h. wenn für den Radius der Gasblase die folgende Beziehung gilt:

$$a \ll \left[\frac{3}{g} \, \frac{\varkappa_1 \mu_1 + \varkappa_2 \mu_2}{\varkappa_1 \rho_1^* + \varkappa_2 \rho_2^*} \right]^{1/3} \tag{58}$$

Durch Experimente muß nachgewiesen werden inwieweit die Formeln aus den Punkten 3 und 4 mit der Realität übereinstimmen.

Literatur

[1] Szlaža J., Umströmung einer Kugel durch ein Zweiphasenmedium, erscheint in der ZAMM

[2] Kotschin N.J., Kibel J.A., Rose N.W., Theoretische Hydromechanik, Band II, Akademie-Verlag, Berlin, 1955

[3]

[4] Rybczynski, Bull. de Cracovie (A), 1911

[5] Hadamard, Comp. Rend. 152, 1735 (1911).