

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ А.А.ЖДАНОВА

Ю. ШЛАЖА

ГИПЕРЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ОКОЛО
ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ.

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель — кандидат
физико-математических наук
Р.Г.БАРАНЦЕВ.

Ленинград.

1966.

СОДЕРЖАНИЕ

	<u>Стр.</u>
<u>ВВЕДЕНИЕ</u>	1
<u>ГЛАВА 1: Метод моментов при гиперзвуковом обтекании тел разреженным газом</u>	7
§ 1. Разложение функции распределения $f^{\pm}(\bar{z}, \bar{u})$ по полиномам $\Psi_m^{\pm}(\bar{z}, \bar{u})$, ортогональным в произвольных областях $\Omega^{\pm}(\bar{z})$ пространства скоростей.....	7
§ 2. Асимптотика интегралов $\alpha_{ij}^{\pm}$ при больших M	13
§ 3. Выражения макропараметров газа через коэффициенты $a_m^{\pm}(\bar{z})$	17
§ 4. Коэффициенты $a_m^{(1)\pm}(\bar{z})$ и первое приближение для макропараметров газа.....	22
<u>ГЛАВА II: Гиперзвуковое течение разреженного газа около бесконечной пластинки</u>	30
§ 1. Первое приближение для макропараметров газа.....	30
§ 2. Вычисление $\alpha_{i0}^{\pm}$ и $\gamma_i^{\pm}$ ($i = 0, 1, \dots, 6$).....	33
§ 3. Асимптотика функций n_s , U_{sx} , U_{sy} , T_s при $h \rightarrow \infty$	35
§ 4. Расчет примеров и результаты.....	39
<u>ГЛАВА III: Асимптотика макропараметров газа при гиперзвуковом течении разреженного газа около полубесконечной пластинки</u>	42
§ 1. Первое приближение для макропараметров газа....	42
§ 2. Асимптотика $\alpha_{i0}^{\pm}$ и $\gamma_i^{\pm}$ ($i = 0, 1, \dots, 6$).....	45
§ 3. Асимптотическое поведение функций n_s , U_{sx} , U_{sy} , T_s при $h \rightarrow \infty$	50
§ 4. Расчет примеров и результаты.....	

ГЛАВА 1У.	Асимптотическое поведение потоков массы, импульса и энергии на полубесконечной пластинке.....	55
§ 1.	Функция распределения $f^{(2)}(\bar{z}_s, \bar{u})$	55
§ 2.	Выражения для $K_i^{(2)} (i = 0, 1, 2)$	58
§ 3.	Оценка интегралов $K_{i2_3}^{(2)}$	65
§ 4.	Асимптотика интегралов $K_{i2_1}^{(2)}$	67
§ 5.	Определение функций $\Psi_{nk}^{(i)}(\lambda)$	73
§ 6.	Асимптотические выражения для $N^{(2)}, \rho_x^{(2)}, E^{(2)}$	76
§ 7.	Вычисление интегралов $H_{nki}^{(j)}$	78
1)	Вычисление $H_{nko}^{(j)}$ и $H_{nk2}^{(j)}$	78
2)	Определение $H_{nk1}^{(j)}$	83
§ 8.	Расчет примеров и результаты.....	85
<u>Литература</u>		90
<u>Приложения</u> (графики и таблицы).....		96

ВВЕДЕНИЕ

В изучении газа, поведение которого описывается уравнениями Навье-Стокса, достигнуты значительные успехи. Указанные уравнения справедливы только в тех случаях, когда отклонения от локального термодинамического равновесия малы во всех точках и во все моменты времени.

Кинетическая теория газов дает микроскопическую, т.е. более общую форму уравнений газовой динамики. Микроскопическое состояние системы определяется функциями распределения молекул, причем каждому виду молекул, имеющихся в системе, соответствует своя функция распределения. Одним из фундаментальных уравнений для определения функции распределения $f(\bar{z}, \bar{u}, t)$ является интегродифференциальное уравнение Больцмана [1]. Постановка граничных задач для уравнения Больцмана долгое время оставалась нерешенным вопросом, так как краевые условия для функции распределения нужно писать в семимерном фазовом пространстве $x, y, z, u_x, u_y, u_z, t$. В кинетике разреженных газов замкнутая постановка задач получается на уровне функции распределения $f(\bar{z}, \bar{u}, t)$, в виде интегрального уравнения С.В.Валландера $f = V f$ [2]. В отличие от уравнения Больцмана оно является чисто интегральным, включает в себя граничные условия и приспособлено к учету общего вида взаимодействия газовых частиц между собой и с поверхностями обтекаемых тел.

Однако строить полное решение на уровне функции распределения нецелесообразно. Обычно интересными бывают только некото-

рые моменты функции распределения. Поэтому важны такие методы решения кинетических задач, которые были бы к нужным величинам прямым путем без предварительного вычисления всей функции распределения. Возможности аналитического решения кинетических задач ограничены. Но в случае гиперзвуковых задач, исходя из кинетических уравнений С.В.Валландера, при комплексном применении итераций, моментных уравнений и асимптотики многие проблемы аэродинамики разреженных газов могут быть решены аналитически до конца. Показать это на некоторых примерах - было целью настоящей диссертации.

Метод последовательных приближений широко применяется при решении различных задач математической физики.

В интересной статье К.О.Фридрикса [3] анализируется общность асимптотических явлений. Надо отметить, что для асимптотического анализа интегральное кинетическое уравнение является качественно более перспективным, чем интегро-дифференциальное уравнение Больцмана, так как в интегральной форме удачно выявляются такие тонкие явления, как неравномерная асимптотика. В кинетических задачах асимптотические явления охватывают как раз такие важные проблемы как пограничный слой, структура скачка, отклонения от равновесных состояний и т.д. Поэтому в аэродинамике разреженных газов большую роль играют асимптотические исследования, так как они дают не только качественные сведения, но и количественные результаты, достаточные для приложений. Важность применения асимптотических методов при решении кинетических задач была отмечена в работах [2].

В основном приходится применять асимптотику к вычислению многократных интегралов. По этому вопросу имеется большое ко-

личество работ разных авторов, например [4 - 15]. Из-за неравномерной асимптотики функции распределения область интегрирования в указанных интегралах делится поверхностями Стокса на подобласти, в которых асимптотические разложения различны. Именно этот факт приводит иногда к довольно сложным геометрическим исследованиям. Несмотря на эти трудности, асимптотические методы остаются очень эффективными при решении разных интересных задач в кинетической теории газов.

Другим важным методом, который использовался в данной работе, является метод моментных уравнений. В этом методе функция распределения представляется в виде разложения по некоторым ортогональным полиномам и на основе уравнения, определяющего функцию распределения, строится система уравнений для отыскания коэффициентов разложения. Исходным пунктом в этом методе является представление функции распределения $f(\bar{z}, \bar{u}, t)$.

В аэродинамике разреженных газов встречаются различные способы представления f . Часто используется, например, бимодальное представление Мотт-Смита [16]. Рассмотрены случаи разложения f по сферическим функциям в пространстве скоростей [17] и полиномам Сонина [1]. Но чаще всего f представляется в виде разложения по полиномам Эрмита [18 - 26].

Надо отметить, что эти представления эффективны, когда функция распределения непрерывна во всем пространстве скоростей.

Для некоторых плоских задач f представляется в виде разложения по полиномам, ортогональным в полупространстве скоростей [27 - 29].

Во всех этих случаях рассмотренные полиномы зависят только от скорости молекул $\bar{u}$, а коэффициенты разложения от $\bar{z}$. Та-

кие представления f целесообразны лишь для узкого круга задач кинетической теории газов.

Более общим является разложение функции распределения по полиномам $\Psi_m^{\pm}(\bar{z}, \bar{u})$, ортогональным в некоторых подпространствах скоростей $\Omega^+(\bar{z})$ и $\Omega^-(\bar{z})$. Это вызвано тем, что в общем случае f терпит разрыв на некоторой конической поверхности в пространстве скоростей.

Поэтому в первой главе диссертации развивается метод моментов при гиперзвуковом обтекании тел разреженным газом, где f представляется в виде разложения по полиномам $\Psi_m^{\pm}(\bar{z}, \bar{u})$, ортогональным в $\Omega^+(\bar{z})$ и $\Omega^-(\bar{z})$. Показано, как в этом случае строятся $\Psi_m^{\pm}$ и выписаны выражения для макропараметров газа через коэффициенты разложения $a_m^{\pm}(\bar{z})$.

Во второй и третьей главе этот метод применяется к решению задач о гиперзвуковом продольном обтекании бесконечной и полубесконечной пластинок в предположении, что молекулы - жесткие упругие шары и их отражение от пластинки диффузное, а температура поверхности не отличается от температуры газа. Выявляется неравномерность асимптотики макропараметров газа вблизи поверхности и носка пластинки. Показан порядок толщины пограничного слоя.

В конце работы, в четвертой главе исследуется асимптотическое поведение потоков массы N , касательного импульса p_x и энергии E на полубесконечной пластинке. Для этого строится второе приближение $f^{(2)}$, в предположении, что функция "рождений" $\Phi^{(1)}$ может быть представлена в виде $f_0^{(1)} Q_0^{(1)}$ где $f_0^{(1)}$ - локальное максвелловское распределение и $Q_0^{(1)}$ - функция столкновений. Этот прием хорошо известен и из литературы

по разреженным газам [2], [16], [40], [41]. Получены графики $N^{(2)}$, $\rho_x^{(2)}$ $E^{(2)}$ в зависимости от расстояния x от носка пластинки.

Течение около плоской пластины при гиперзвуковых скоростях рассматривалось в различных теоретических [30-32], [34], [36], [38] и экспериментальных [33], [35], [37], [39] исследованиях.

В опубликованных теоретических работах авторы в основном пытались рассчитать течение, обусловленное взаимодействием вязкого пограничного слоя с невязким течением за ударной волной.

В работе [30] описывается расчет коэффициента сопротивления плоской полубесконечной теплоизолированной пластины в гиперзвуковом газовом потоке со скольжением. Рассматривается сильное взаимодействие скачка со слоем. При расчете пограничного слоя использована интегральная форма уравнения импульсов с линейным профилем скорости и с учетом скорости скольжения.

Ламинарный пограничный слой на плоской пластине при учете скольжения и "несильном" взаимодействии между внешним потоком и пограничным слоем исследовался в работе [31].

В [32] рассматривалось обтекание плоской затупленной пластины. При решении этой задачи использовались интегральные соотношения закона сохранения энергии, импульса и массы.

В [36] предлагается метод расчета влияния вязкости на гиперзвуковое обтекание передней части различных тел. В методе принимаются в расчет конечная толщина передней кромки и действие отошедшей ударной волны. Решение ищется при помощи обычных уравнений пограничного слоя.

Задача о теплообмене тонкой охлаждаемой пластины бесконеч-

ного размаха, обтекаемой сверхзвуковым потоком разреженного воздуха, при нулевом угле атаки, рассмотрена в [38]. Анализ проводится применительно к условиям, когда имеют место большие значения параметров взаимодействия. Рассмотрение носит приближенный характер и в сильной степени базируется на ряде экспериментальных фактов [37], [39].

В экспериментальных работах [33], [35], [37] проведено исследование обтекания плоской пластины с острой передней кромкой в гиперзвуковой ударной трубе. Были получены распределение давления и коэффициента теплообмена от передней кромки вниз по потоку.

В указанных работах авторы в основном пользовались при решении разных задач о гиперзвуковом течении разреженного газа около плоских пластинок обычными уравнениями пограничного слоя.

Цель настоящей диссертации состояла в том, чтобы решить с кинетической точки зрения некоторые проблемы, возникающие при гиперзвуковом течении разреженного газа около полубесконечной пластинки (поведение макропараметров газа вблизи поверхности и носка пластинки и поведение потоков массы, импульса и энергии на полубесконечной пластинке в зависимости от расстояния от носка пластинки).

Основные результаты работы изложены в статьях автора [52-57].

ГЛАВА I.

МЕТОД МОМЕНТОВ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ.

В аэродинамике разреженных газов большой интерес представляют задачи об обтекании тел произвольной формы. В данной главе показаны возможные пути решения такой проблемы.

Сначала дается представление функции распределения через полиномы, ортогональные в произвольных областях пространства скоростей. При рассмотрении гиперзвуковых задач эти полиномы можно строить асимптотическим путем.

Далее выписаны система интегральных моментных уравнений и выражения макропараметров газа через коэффициенты $a_m^{\pm}$ разложения функции распределения. С помощью метода итераций мы в конце главы найдем выражения для макропараметров газа в первом приближении.

§ 1. Разложение функции распределения $f^{\pm}(\bar{z}, \bar{u})$ по полиномам $\psi_m^{\pm}(\bar{z}, \bar{u})$ ортогональным в произвольных областях $\Omega^{\pm}(\bar{z})$ пространства скоростей.

Обтекание тела разреженным одноатомным газом можно описывать системой кинетических уравнений С.В.Валландера [2], которая в стационарном случае имеет вид:

$$f(\bar{z}, \bar{u}) = \begin{cases} \frac{1}{u_n} \tilde{\Phi}(\bar{z}_s, \bar{u}) \Pi(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) + \int_0^{\tau_s} \Phi(\bar{z} - \tau \bar{u}, \bar{u}) \Pi(\bar{z}, \bar{u}, \tau) d\tau & \bar{u} \in \Omega^+(\bar{z}) \\ \int_0^{\infty} \Phi(\bar{z} - \tau \bar{u}, \bar{u}) \Pi(\bar{z}, \bar{u}, \tau) d\tau & \bar{u} \in \Omega^-(\bar{z}) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Здесь

$\bar{z}$ - радиус-вектор точки (x, y, z) в пространстве

$\bar{z}_s$ - радиус-вектор точки (x_s, y_s, z_s) на поверхности

$F(\bar{z}_s) = 0$ обтекаемого тела

$\bar{u}$ - скорость молекул

$\bar{n} = \bar{n}(\bar{z}_s)$ - внешняя нормаль к поверхности тела

τ - время свободного движения молекулы

τ_s - время свободного движения молекулы от поверхности тела

$[\tau_s$ - наименьший положительный корень уравнения

$F(\bar{z} - \tau_s \bar{u}) = 0]$

$f(\bar{z}, \bar{u})$ - функция распределения молекул газа по координатам и скоростям

$\Pi(\bar{z}, \bar{u}, \tau)$ - вероятность свободного движения молекулы в точку $\bar{z}$ со скоростью $\bar{u}$ за время τ .

$\phi(\bar{z}, \bar{u})$ - внутренняя функция рождений

$\tilde{\phi}(\bar{z}_s, \bar{u})$ - граничная функция рождений

$\Omega^+(\bar{z})$ - конус в пространстве скоростей, содержащий все скорости $\bar{u}$, с которыми молекулы могут прийти с тела в точку $\bar{z}$ без столкновений

$\Omega^-(\bar{z})$ - оставшаяся часть пространства скоростей.

Все рассуждения, проводимые в данной главе, можно распространить и на случай нестационарных задач.

Одним из методов решения кинетических задач является метод моментов, при котором функция распределения f представляется в виде разложения по ортогональным полиномам и на основе уравнения Больцмана или (I.1.1) строится система уравнений для отыскания коэффициентов разложения. Эти коэффициенты в свою очередь дают возможность вычислить макропараметры газа.

Рассматривая разреженный газ в неограниченном пространстве, целесообразно представлять функцию распределения в виде разложения по полиномам, ортогональным во всем пространстве скоростей [18], [25]. Если выбрать в качестве весовой функции максвелловскую функцию распределения.

$$f_0 = n_0 \left(\frac{h_0}{\pi} \right)^{3/2} \exp \left\{ -h_0 (\bar{u} - \bar{U}_0)^2 \right\} \quad (1.1.2)$$

где $h_0 = \frac{m}{2\kappa T_0}$; n_0 , $\bar{U}_0$, T_0 - плотность, скорость и температура набегающего невозмущенного потока соответственно, то получаемые полиномы будут полиномами Эрмита, которые являются тензорами m -го ранга 3-го порядка.

При рассмотрении задачи Куэтта имеет смысл раскладывать функцию распределения f по полиномам, ортогональным в полупространстве скоростей. Это вызвано тем, что f терпит разрыв на плоскости $u_n = 0$, и целесообразно представлять функцию распределения отдельно при $u_n < 0$ и $u_n > 0$ [27], [29].

Такие представления функции распределения пригодны только для довольно узкого круга задач.

В общем случае аэродинамики разреженных газов приходится иметь дело с задачами, в которых функция распределения $f(\bar{z}, \bar{u})$ терпит разрыв на некоторой конической поверхности, делящей пространство скоростей на два подпространства $\Omega^+(\bar{z})$ и $\Omega^-(\bar{z})$. В этом случае система интегральных уравнений для f имеет вид (1.1.1) и приобретает интерес разложения функции распределения f по полиномам Ψ_m^+ , ортогональным в Ω^+ и Ω^- с весом f_0 из (1.1.2).

В дальнейшем все величины, обозначенные индексом "+" отно-

сятся к части пространства скоростей Ω^+ , а обозначенные индексом "-" к части Ω^- . Займемся построением полиномов $\psi_m^\pm$. Если ввести скалярное произведение формулой

$$(\alpha, \beta)^\pm = \frac{1}{\varepsilon^\pm} \iiint_{\Omega^\pm} f_0 \alpha \beta d\bar{u}, \quad (1.1.3)$$

то условия ортонормированности полиномов $\psi_m^\pm$ записывается в виде

$$(\psi_i, \psi_j)^\pm = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases} \quad (1.1.4)$$

и получаемые полиномы будут ортогональными в $\Omega^\pm$ с весом f_0 из (1.1.2). В (1.1.3) $\varepsilon^\pm$ выбран так, чтобы $\psi_0^\pm = 1$.

Пусть функция распределения f терпит разрыв на произвольной конической поверхности в пространстве скоростей. При этом пространство $\bar{u}$ распадается на две части, Ω^+ и Ω^- . Если рассматривается задача обтекания нескольких тел, то пространство скоростей распадается на несколько частей, но это не существенно для нашего рассмотрения. Так, для простоты рассмотрим обтекание разреженным газом только одного тела.

Пусть

$$1; u_i; u_i u_j; \dots; u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_m} = \{u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_m}\} \quad (1.1.5)$$

линейно независимые тензоры m -го ранга 3-го порядка, причем $i_m = 1, 2, 3$; $m = 0, 1, 2, \dots$ и u_{i_m} - компоненты скорости молекул. Составим из (1.1.5) последовательность $\{u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_m}\}_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m}$ также состоящую из линейно независимых элементов. Выпишем первые элементы этой последовательности

$$1, u_x, u_y, u_z, u_x^2, u_y^2, u_z^2, u_x u_y, u_x u_z, u_y u_z, \\ u_x^2 u_y, u_y^3, u_z^2 u_y, u_x^3, u_x u_y^2, u_x u_z^2, u_y^2 u_z, u_z^3, u_x u_y u_z, \dots \quad (1.1.6)$$

причем индексы x, y, z соответствуют индексам 1, 2, 3. Пронумеруем элементы (1.1.6) следующим образом

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots \quad (1.1.7)$$

и ортонормируем их по обычной схеме [42]. При этом получим последовательность $\{\psi_i^\pm\}$ ортонормированных полиномов.

Имеем

$$\theta_m^\pm = \varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} c_{mk}^\pm \psi_k^\pm, \quad \psi_k^\pm = \frac{\theta_k^\pm}{\|\theta_k\|^\pm} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.8)$$

где

$$c_{mk}^\pm = (\varphi_m, \psi_k)^\pm \quad (1.1.9)$$

Так как границы областей Ω^+ и Ω^- зависят от $\bar{z}$, то $c_{mk}^\pm$ ввиду (1.1.3) являются функциями от $\bar{z}$, следовательно полученные полиномы $\psi_m^\pm$ являются функциями от $\bar{z}$ и $\bar{u}$. Отсюда разложение функции распределения f в областях $\Omega^\pm$ можно записать в виде

$$f^\pm(\bar{z}, \bar{u}) = f_0(\bar{u}) \sum_{m=0}^{\infty} a_m^\pm(\bar{z}) \psi_m^\pm(\bar{z}, \bar{u}) \quad (1.1.10)$$

Введем следующие обозначения

$$\alpha_{ij}^\pm = \iiint_{\Omega^\pm} f_0 \varphi_i \varphi_j d\bar{u}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{ij}^\pm = \alpha_{ji}^\pm \quad (1.1.11)$$

где f_0 и φ_i функции из (1.1.2) и (1.1.7). Выразим (1.1.8) через (1.1.7) и (1.1.11). Соотношения (1.1.8) можно последова-

только переписать в следующем виде

$$\theta_m^\pm = \varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} b_{mk}^\pm \varphi_k \quad \psi_m^\pm = \frac{\theta_m^\pm}{\|\theta_m\|^\pm} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.12)$$

где

$$b_{mk}^\pm = \frac{c_{mk}^\pm}{\|\theta_k\|^\pm} - \sum_{\substack{i=1 \\ i > k}}^{m-1} \frac{c_{mi}^\pm}{\|\theta_i\|^\pm} b_{ik}^\pm \quad (1.1.13)$$

Так как $c_{mk}^\pm = (\varphi_m, \varphi_k)^\pm$, то подставляя сюда $\varphi_k^\pm$ можно последовательно выразить $c_{mk}^\pm$ через $\alpha_{ij}^\pm$, а именно, используя (1.1.3), имеем

$$c_{mk}^\pm = \frac{1}{\varepsilon^\pm \|\theta_k\|^\pm} \left\{ \alpha_{mk}^\pm - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{mi}^\pm b_{ki}^\pm \right\} \quad (1.1.14)$$

Подставляя (1.1.14) в (1.1.13), получим выражение для $b_{mk}^\pm$ через $\alpha_{ij}^\pm$, то-есть

$$b_{mk}^\pm = \frac{1}{\varepsilon^\pm \|\theta_k\|^{\pm 2}} \left\{ \alpha_{mk}^\pm - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{mi}^\pm b_{ki}^\pm \right\} - \sum_{\substack{i=1 \\ i > k}}^{m-1} \frac{b_{ik}^\pm}{\varepsilon^\pm \|\theta_i\|^{\pm 2}} \left\{ \alpha_{mi}^\pm - \sum_{\ell=0}^{i-1} \alpha_{m\ell}^\pm b_{i\ell}^\pm \right\} \quad (1.1.15)$$

Зная $b_{mk}^\pm$, знаем и $\theta_m^\pm$. Для вычисления $\psi_m^\pm$ надо еще получить $\|\theta_m\|^\pm$. По (1.1.3), (1.1.11) и (1.1.12) имеем

$$\begin{aligned} \|\theta_m\|^{\pm 2} &= \frac{1}{\varepsilon^\pm} \iint_{\Omega^\pm} f_0 \left[\varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} b_{mk}^\pm \varphi_k \right]^2 d\bar{u} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^\pm} \left\{ \alpha_{mm}^\pm - 2 \sum_{k=0}^{m-1} b_{mk}^\pm \alpha_{mk}^\pm + \sum_{\substack{i,k=0 \\ i \neq k}}^{m-1} b_{mi}^\pm b_{mk}^\pm \alpha_{ik}^\pm \right\} \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

По условию, $\varepsilon^{\pm}$ выбирается так, чтобы $\psi_0^{\pm} = 1$. Отсюда и из (1.1.12) и (1.1.16) следует, что $\varepsilon^{\pm} = \alpha_{00}^{\pm}$. Полиномы $\psi_m^{\pm}$ будут окончательно найдены, если будут вычислены интегралы $\alpha_{ij}^{\pm}$ при $i \geq j$ по (1.1.11). Рассмотренное построение полиномов $\psi_m^{\pm}$ верно для произвольных областей в пространстве скоростей.

§ 2. Асимптотика интегралов $\alpha_{ij}^{\pm}$ при больших M .

Рассмотрим обтекание тела произвольной формы одноатомным разреженным газом. При этом можно отметить, что система осей координат всегда может быть выбрана так, чтобы направление скорости $\vec{U}_0$ набегающего потока совпало с положительным направлением оси абсцисс (рис.1).

На рисунке 1 означают: A - обтекаемое тело, $K(\bar{z})$ - конус с вершиной в точке (x, y, z) под которым видно тело A , D - теневая область тела, ограниченная поверхностью $C(\bar{z})$.

Допустим, что отражение молекул, которые являются упругими шарами, от границы диффузное, а температура поверхности не отличается от температуры газа.

Функцию распределения $f(\bar{z}, \vec{u})$ для точек вне D можно представить в виде (1.1.10). Полиномы $\psi_m^{\pm}$ из (1.1.10) будут определены по (1.1.12), если мы сумеем вычислить интегралы $\alpha_{ij}^{\pm}$, но это зависит от формы обтекаемого тела и тем самым от областей $\Omega^{\pm}$ в пространстве скоростей (рис.2).

При специальном виде $\Omega^{\pm}$ эти интегралы вычисляются точно, например, в случае полного, половины и четверти пространства скоростей. Но если $\Omega^{\pm}$ сложным образом зависят от $\bar{z}$,

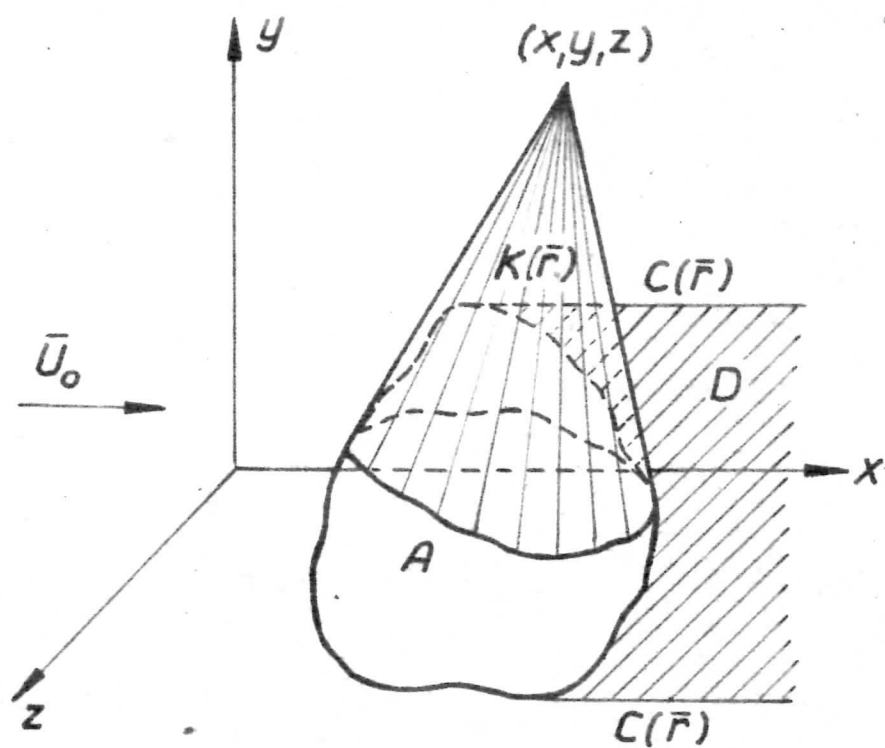


рис. 1

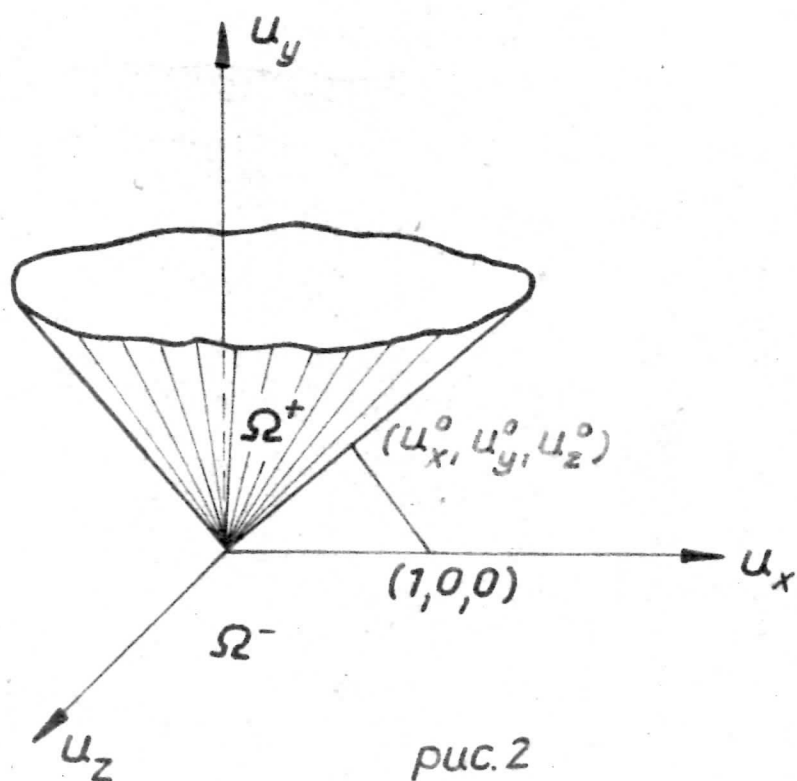


рис. 2

то приходится проводить численное интегрирование.

В случае гиперзвуковых задач ввиду δ -образности максвелловской функции распределения f_0 можно провести асимптотические исследования интегралов $\alpha_{ij}^{\pm}$ по параметру M .

Для асимптотического анализа удобна безразмерная форма записи кинетических уравнений.

Пусть задаче соответствует некоторое характерное равновесное состояние газа с численной плотностью n_0 , средней скоростью $\bar{U}_0$, температурой $T_0 = \frac{1}{2Rn_0} = \frac{c_0^2}{2R}$ (R - газовая постоянная). Так как молекулы являются упругими шарами, то сечение столкновения $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$.

Если в задаче имеется линейный характерный размер L , то безразмерные уравнения отличаются от размерных (1.1.1) множителем $\frac{1}{K}$ перед интегралами по τ . Здесь K в $\sqrt{2}$ раз больше обычного числа Кнудсена $Kn = \frac{\ell}{L}$, где ℓ - длина свободного пробега.

Если же в задаче нет характерного линейного макроразмера, то за характерную длину естественно взять величину порядка свободного пробега $\frac{1}{\sigma_0 n_0} = \ell\sqrt{2}$; тогда параметр K в уравнениях (1.1.1) не появляется, и они по форме не будут отличаться от размерных.

Для удобства, мы в дальнейшем проводим рассуждения для задач, в которых нет линейного характерного макроразмера. Для задач в которых есть линейный характерный размер исследования проводятся аналогично.

Итак, введем безразмерные величины для гиперзвуковых задач, в которых нет линейного характерного макроразмера, по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= U_0 \bar{u}' , \quad \bar{z} = \frac{\bar{z}'}{n_0 \epsilon_0} , \quad \tau = \frac{\tau'}{n_0 \epsilon_0 U_0} , \quad f = n_0 U_0^{-3} f' , \\
 \tilde{\theta} &= U_0^{-3} \tilde{\theta}' , \quad Q = n_0 \epsilon_0 U_0 Q' , \quad N = n_0 U_0 N' , \\
 \phi &= n_0^2 \epsilon_0 U_0^{-2} \phi' , \quad \tilde{\phi} = n_0 U_0^{-2} \tilde{\phi}' , \quad \theta = U_0^{-3} \theta' , \\
 n &= n_0 n' , \quad \bar{U} = U_0 \bar{U}' , \quad T = T_0 T' , \\
 P_{ij} &= \frac{n_0 m}{2} U_0^2 P'_{ij} , \quad \bar{H} = \frac{n_0 m}{2} U_0^3 \bar{H}' ,
 \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

где величины со штрихами безразмерны.

Далее Q - функция столкновения, N - частота ударов в точке $\bar{z}_s$, θ - внутренняя трансформанта, $\tilde{\theta}$ - граничная трансформанта, n , $\bar{U}$, T , P_{ij} , $\bar{H}$ - плотность, скорость, температура газа, тензор напряжения и вектор теплового потока.

В дальнейшем все величины безразмерны и мы их пишем без штриха.

f_0 из (1.1.2) можно переписать в виде

$$f_0(\bar{u}, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2} \tag{1.2.2}$$

где

$$h = \frac{5}{6} M^2 , \quad \bar{U}_0 = \{1, 0, 0\} \tag{1.2.3}$$

Таким образом, $\alpha_{ij}^{\pm}$ ввиду (1.1.11) примут вид

$$\alpha_{ij}^{\pm} \equiv \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \iiint_{\Omega^{\pm}} F_{ij}(\bar{u}) e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2} d\bar{u} \tag{1.2.4}$$

Эти интегралы можно исследовать асимптотически при $h \rightarrow \infty$.

Функции F_{ij} являются степенными функциями относительно компонент скорости молекул $\bar{u}$.

Из (1.2.4) видно, что точкой максимума подинтегральной функции является точка $(1, 0, 0)$ в пространстве скоростей. Для области Ω^- на рис. 2 эта точка является внутренней, а для области Ω^+ внешней. Поэтому асимптотическое поведение α_{ij}^+ по h будет экспоненциальным, а асимптотическое поведение α_{ij}^- степенным [43], [44].

Чтобы получить α_{ij}^+ , нужно исследовать асимптотическое поведение интегралов в окрестности точки (u_x^0, u_y^0, u_z^0) , которая находится на кратчайшем расстоянии от точки $(1, 0, 0)$ до области Ω^+ и тем самым является граничной точкой для этой области.

Если поверхность конуса Ω^+ содержит точку $(1, 0, 0)$, что имеет место для точек, расположенных на $C(\bar{z})$ в физическом пространстве, то асимптотическое поведение α_{ij}^+ будет степенным.

Отсюда видно, что имеет место неравномерность асимптотики α_{ij}^+ вблизи поверхности $C(\bar{z})$.

Из сказанного следует, что при асимптотическом исследовании $\alpha_{ij}^{\pm}$ можно различать два случая:

- 1) когда точка максимума подинтегральной функции является внутренней точкой для области интегрирования,
- 2) когда точка максимума является граничной точкой.

Асимптотическое исследование многократных интегралов как в случае 1) так и в случае 2) для различных типов граничных точек проводилось в основном в работах L.C. Hsu [5 - 10].

Если в гиперзвуковых задачах имеется симметрия, скажем по

u_z , то интегралы $\alpha_{ij}^{\pm}$ по u_z вычисляются точно и остаются двойные интегралы по u_x и u_y . Обширное асимптотическое исследование двойных интегралов проводилось в работе J. Focke [13]. У него рассматриваются также разного рода граничные точки.

Интерес при вычислении $\alpha_{ij}^{\pm}$ представляет также работа Н.А.Тихонова и А.А.Самарского [11], которые рассматривают асимптотическое разложение интегралов от пикообразных функций.

Окончательно можно сказать, что для асимптотического исследования $\alpha_{ij}^{\pm}$ при $h \rightarrow \infty$ в математической литературе имеется большое количество работ разных авторов, которыми можно воспользоваться. Тем самым принципиальных трудностей при определении $\alpha_{ij}^{\pm}$ в гиперзвуковых задачах не возникает и можно получить асимптотические выражения для полиномов $\psi_m^{\pm}$.

§ 3. Выражения макропараметров газа через коэффициенты

$$\underline{a_m^{\pm}(\bar{z})}$$

Найдем теперь формулы для макропараметров газа, которые выражаются через коэффициенты $a_m^{\pm}$ разложения функции распределения $f(\bar{z}, \bar{u})$ по полиномам, ортогональным в произвольных областях $\Omega^{\pm}$ в пространстве скоростей.

Перепишем (1.1.12) в следующем виде

$$\psi_m^{\pm} = \sigma_m^{\pm} \varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^{\pm} \varphi_k \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.1)$$

где

$$\sigma_m^{\pm} = \frac{1}{\|\varphi_m\|^{\pm}}, \quad \delta_{mk}^{\pm} = \sigma_m^{\pm} b_{mk}^{\pm} \quad (1.3.2)$$

причем $b_{mk}^{\pm}$ и $\|\theta_m\|^{\pm}$ вычисляются по (1.1.15) и (1.1.16).

Подставляя в (1.1.1) разложение (1.1.10), умножая соответственно на ψ_m^+ и ψ_m^- и производя интегрирование по Ω^+ и Ω^- , приходим, ввиду ортонормированных полиномов $\psi_m^{\pm}$, к бесконечной системе интегральных моментных уравнений.

$$a_m^{\pm}(\bar{z}) = \iiint_{\Omega^{\pm}} \psi_m^{\pm}(\bar{z}, \bar{u}) V^{\pm} f^{\pm} d\bar{u} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.3)$$

Здесь через $V^{\pm} f^{\pm}$ обозначены правые части в (1.1.1).

Введем следующие обозначения

$$M_i^{\pm}(\bar{z}) = \iiint_{\Omega^{\pm}} \varphi_i f^{\pm} d\bar{u} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.4)$$

Умножая разложение (1.1.10) на (1.3.1) и интегрируя по Ω^+ и Ω^- , получим следующие соотношения

$$M_m^{\pm} = \frac{1}{6_m^{\pm}} \left[a_m^{\pm} + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^{\pm} M_k^{\pm} \right] \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.5)$$

Выражая в этой формуле последовательно $M_m^{\pm}$ через $a_m^{\pm}$ и принимая во внимание (1.1.15) и (1.1.14), (1.3.5) перепишем в виде

$$M_i^{\pm} = \sum_{k=0}^i c_{ik}^{\pm} a_k^{\pm} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.6)$$

где $c_{ik}^{\pm}$ вычисляются по (1.1.14) и $c_{ii}^{\pm} = \frac{1}{6_i^{\pm}}$

Введем еще обозначение

$$\{B\}^{\pm} = B^+ + B^- \quad (1.3.7)$$

где B может быть скаляром, вектором или тензором.

Основные макропараметры газа n , $\bar{U}$, T , P , $\bar{H}$, а именно плотность, макроскопическая скорость, температура газа, тензор напряжения, вектор теплового потока, вычисляются по следующим безразмерным формулам [2]:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f d\bar{u} = \{n\}^{\pm} \quad (1.3.8)$$

где $n^+ = \int_{\Omega^+} f^+ d\bar{u}$, $n^- = \int_{\Omega^-} f^- d\bar{u}$

и аналогично

$$n\bar{U} = \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{u} d\bar{u} = \{n\bar{U}\}^{\pm} \quad (1.3.9)$$

$$\frac{3nT}{2h} = \int_{-\infty}^{\infty} f (\bar{u} - \bar{U})^2 d\bar{u} = \left\{ \frac{3nT}{2h} \right\}^{\pm} \quad (1.3.10)$$

$$\frac{1}{2} P_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} f (u_i - U_i)(u_j - U_j) d\bar{u} = \frac{1}{2} \{P_{ij}\}^{\pm} \quad (1.3.11)$$

где: $i, j = 1, 2, 3$ соответствуют x, y, z

$$\bar{H} = \int_{-\infty}^{\infty} f (\bar{u} - \bar{U})^2 (\bar{u} - \bar{U}) d\bar{u} = \{\bar{H}\}^{\pm} \quad (1.3.12)$$

Принимая во внимание (1.1.7), (1.3.4) и (1.3.6), величины (1.3.8) - (1.3.12) можно выразить через $M_i^{\pm}$ и тем самым через $a_m^{\pm}$, т.е.

$$n = \{M_0\}^{\pm} = \{a_0\}^{\pm} \quad (1.3.13)$$

$$n\bar{U} = \{\bar{U}^*\}^{\pm} \quad (1.3.14)$$

где

$$\{U_x^*\}^\pm = \{M_1\}^\pm, \{U_y^*\}^\pm = \{M_2\}^\pm, \{U_z^*\}^\pm = \{M_3\}^\pm$$

$$\frac{3nT}{2h} = \{M_4 + M_5 + M_6\}^\pm - nU^2 \quad (1.3.15)$$

$$\frac{1}{2} P_{ij} = \{P_{ij}^*\}^\pm - nU_i U_j, \quad P_{ij} = P_{ji}$$

где

$$\{P_{xx}^*\}^\pm = \{M_4\}^\pm, \{P_{xy}^*\}^\pm = \{M_7\}^\pm, \{P_{xz}^*\}^\pm = \{M_8\}^\pm \quad (1.3.16)$$

$$\{P_{yy}^*\}^\pm = \{M_5\}^\pm, \{P_{yz}^*\}^\pm = \{M_9\}^\pm, \{P_{zz}^*\}^\pm = \{M_6\}^\pm$$

$$\bar{H} = \{\bar{H}^*\}^\pm - n\bar{U}(U^2 + \frac{3T}{2h}) - \bar{U} \cdot P \quad (1.3.17)$$

причем

$$\{H_x^*\}^\pm = \{M_{13} + M_{14} + M_{15}\}^\pm$$

$$\{H_y^*\}^\pm = \{M_{10} + M_{11} + M_{12}\}^\pm \quad (1.3.18)$$

$$\{H_z^*\}^\pm = \{M_{16} + M_{17} + M_{18}\}^\pm$$

Далее, выразим частоту ударов молекул о тело, импульсы и энергию, передаваемые молекулами телу, через коэффициенты $a_m^\pm$.

Для частоты ударов в точке $\bar{z}_s$ имеем [2]

$$N(\bar{z}_s) = - \iiint_{u_n < 0} f(\bar{z}_s, \bar{u}) u_n d\bar{u} \quad (1.3.19)$$

где

$$u_n = U_x \cos(\hat{n}, x) + U_y \cos(\hat{n}, y) + U_z \cos(\hat{n}, z) \quad (1.3.20)$$

Подставляя (1.3.20) в (1.3.19) и принимая во внимание (1.3.4) и

(1.3.6), получим

$$N(\bar{z}_s) = - U_n^{*-}(\bar{z}_s) \quad (1.3.21)$$

где U_n^{*-} - нормальная составляющая вектора $\bar{U}^{*-}$, компоненты которого вычисляются по (1.3.14).

Импульс и энергия, передаваемые молекулами телу за единицу времени на единичной площадке поверхности, содержащей точку $\bar{z}_s$, вычисляются по следующим формулам [2]:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{z}_s) &= \bar{p}^- - \bar{p}^+ \\ E(\bar{z}_s) &= E^- - E^+ \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

где $\bar{p}^-$, E^- - импульс и энергия, приносимые молекулами к телу и $\bar{p}^+$, E^+ - значения этих величин, уносимые от тела отраженными молекулами.

Последние вычисляются с помощью граничной функции рождения $\tilde{\Phi}(\bar{z}_s, \bar{u})$, которая в свою очередь зависит от схемы отражения.

$$\bar{p}^+(\bar{z}_s) = 2 \iiint_{u_n > 0} \bar{u} \tilde{\Phi}(\bar{z}_s, \bar{u}) d\bar{u} \quad (1.3.23)$$

$$E^+(\bar{z}_s) = \iiint_{u_n > 0} u^2 \tilde{\Phi}(\bar{z}_s, \bar{u}) d\bar{u}$$

Рассмотрим теперь определение $\bar{p}^-$ и E^- . Имеем [2]

$$\bar{p}^-(\bar{z}_s) = -2 \iiint_{u_n < 0} f(\bar{z}_s, \bar{u}) u_n \bar{u} d\bar{u} \quad (1.3.24)$$

$$E^-(\bar{z}_s) = - \iiint_{u_n < 0} f(\bar{z}_s, \bar{u}) u_n u^2 d\bar{u} \quad (1.3.25)$$

Подставляя (1.3.20) в (1.3.24) и (1.3.25) и принимая во внимание

мание (1.3.4) и (1.3.6), будем иметь

$$p_i^-(\bar{z}_s) = -2 P_{in}^{*-}(\bar{z}_s) \quad i = x, y, z \quad (1.3.26)$$

$$E^-(\bar{z}_s) = -H_n^{*-}(\bar{z}_s) \quad (1.3.27)$$

где P_{in}^{*-} - нормальная составляющая вектора $\bar{P}_i^{*-}$ с компонентами $P_{ix}^{*-}, P_{iy}^{*-}, P_{iz}^{*-}$, которые вычисляются по (1.3.16) и H_n^{*-} - нормальная составляющая вектора $\bar{H}^{*-}$, компоненты которого определяются по (1.3.18).

Из формул (1.3.13)-(1.3.18), (1.3.21), (1.3.26) и (1.3.27) видно, что макропараметры газа можно вычислить, если известны $a_m^\pm$.

Эти коэффициенты могут быть найдены из системы интегральных моментных уравнений (1.3.3). Одним из методов определения $a_m^\pm$ является метод итераций. В следующем параграфе найдем выражения для $a_m^\pm$ в первом приближении с помощью метода последовательных приближений.

§ 4. Коэффициенты $a_m^{(1)\pm}$ и первое приближение для макропараметров газа.

По (1.1.1) имеем

$$f = \begin{cases} f^+ = V^+ f^+ & \text{при } \bar{u} \in \Omega^+ \\ f^- = V^- f^- & \text{при } \bar{u} \in \Omega^- \end{cases} \quad (1.4.1)$$

где $V^\pm f^\pm$ правые части в (1.1.1).

Для функций, которые входят в правые части (1.4.1), имеем следующие выражения [2]:

$$\tilde{\phi}(\bar{z}_s, \bar{u}) = N(\bar{z}_s) \tilde{\theta}(\bar{u}) \quad (1.4.2)$$

где $N(\bar{z}_s)$ вычисляется по (1.3.19) и $\tilde{\theta}(\bar{u})$ при диффузном отражении имеет вид

$$\tilde{\theta} = \frac{2h^2}{\pi} u_n e^{-hu^2} \quad (1.4.3)$$

Далее

$$\Pi(\bar{z}, \bar{u}, \tau) = \exp \left\{ - \int_0^\tau Q(\bar{z} - q\bar{u}, \bar{u}) dq \right\} \quad (1.4.4)$$

где

$$Q(\bar{z}, \bar{u}) = \{ Q(\bar{z}, \bar{u}) \}^\pm \quad \text{и} \quad (1.4.5)$$

$$Q^\pm(\bar{z}, \bar{u}) = \iiint_{\Omega^\pm} |\bar{u} - \bar{u}_1| f^\pm(\bar{z}, \bar{u}_1) d\bar{u}_1 \quad (1.4.6)$$

Аналогично

$$\Phi(\bar{z}, \bar{u}) = \Phi^{++}(\bar{z}, \bar{u}) + 2\Phi^{+-}(\bar{z}, \bar{u}) + \Phi^{--}(\bar{z}, \bar{u}) \quad (1.4.7)$$

где

$$\Phi^{\varepsilon\Delta}(\bar{z}, \bar{u}) = \iiint_{\Omega^\varepsilon} \iiint_{\Omega^\Delta} |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| f^\varepsilon(\bar{z}, \bar{u}_1) f^\Delta(\bar{z}, \bar{u}_2) \Theta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}) d\bar{u}_1 d\bar{u}_2 \quad (1.4.8)$$

и для упругих шарообразных молекул

$$\Theta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}) = \frac{1}{\pi |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|^2} \delta \left\{ \left| \bar{u} - \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2} \right| - \frac{|\bar{u}_2 - \bar{u}_1|}{2} \right\}$$

ε и Δ могут быть как "+" так и "-".

В (1.4.7) Φ^{++} характеризует взаимодействие отраженных молекул и Φ^{--} взаимодействие падающих молекул между собой, так как Φ^{+-} характеризует взаимодействие между отраженными и падающими частицами.

Подставляя разложение функции распределения (1.1.10) в формулы и (1.4.2)-(1.4.8) и принимая во внимание (1.3.1), получим для N , $Q^\pm$ и $\Phi^{\varepsilon\Delta}$

$$N(\bar{z}_s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^-(\bar{z}_s) \tilde{\beta}_m^-(\bar{z}_s) \quad (1.4.9)$$

где

$$\tilde{\beta}_m^-(\bar{z}_s) = G_m^-(\bar{z}_s) \beta_m^- - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^-(\bar{z}_s) \beta_k^- \quad (1.4.10)$$

и

$$\beta_m^- = - \iiint_{u_n < 0} u_n f_0 \varphi_m d\bar{u} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.11)$$

$$Q^\pm(\bar{z}, \bar{u}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^\pm(\bar{z}) \tilde{A}_m^\pm(\bar{z}, \bar{u}) \quad (1.4.12)$$

где

$$\tilde{A}_m^\pm(\bar{z}, \bar{u}) = G_m^\pm(\bar{z}) A_m^\pm(\bar{z}, \bar{u}) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^\pm(\bar{z}) A_k^\pm(\bar{z}, \bar{u}) \quad (1.4.13)$$

и

$$A_m^\pm(\bar{z}, \bar{u}) = \iiint_{\Omega^\pm} |\bar{u} - \bar{u}_1| \varphi_m(\bar{u}_1) f_0(\bar{u}_1) d\bar{u}_1 \quad (1.4.14)$$

Далее

$$\Phi^{\varepsilon\Delta}(\bar{z}, \bar{u}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i^\varepsilon(\bar{z}) a_j^\Delta(\bar{z}) \tilde{B}_{ij}^{\varepsilon\Delta}(\bar{z}, \bar{u}) \quad (1.4.15)$$

где

$$\tilde{B}_{ij}^{\varepsilon\Delta} = G_i^\varepsilon G_j^\Delta B_{ij}^{\varepsilon\Delta} - G_i^\varepsilon \sum_{k=0}^{j-1} \delta_{jk}^\Delta B_{ik}^{\varepsilon\Delta} - G_j^\Delta \sum_{k=0}^{i-1} \delta_{ik}^\varepsilon B_{jk}^{\varepsilon\Delta} + \sum_{\ell=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{j-1} \delta_{i\ell}^\varepsilon \delta_{jk}^\Delta B_{\ell k}^{\varepsilon\Delta} \quad (1.4.16)$$

и

$$B_{ij}^{\varepsilon\Delta}(\bar{z}, \bar{u}) = \iiint_{\Omega^{\varepsilon}} \iiint_{\Omega^{\Delta}} \varphi_i(\bar{u}_1) \varphi_j(\bar{u}_2) |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| f_0(\bar{u}_1) f_0(\bar{u}_2) \theta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}) d\bar{u}_1 d\bar{u}_2 \quad (1.4.17)$$

Как было показано в § 3, можно выразить $\delta_{mk}^{\pm}$ из формул (1.4.10), (1.4.13) и (1.4.16) по (1.3.2), (1.1.15) и (1.1.16) через интегралы $\alpha_{ij}^{\pm}$.

Далее при $h \rightarrow \infty$ можно асимптотически исследовать интегралы $\beta_m^{\pm}$, $A_m^{\pm}$, $B_{ij}^{\varepsilon\Delta}$ из (1.4.11), (1.4.14) и (1.4.17), так как в подинтегральную функцию входит максвелловская функция распределения f_0 .

Трехкратные интегралы $\beta_m^{\pm}$ и $A_m^{\pm}$ оцениваются сравнительно легко. При асимптотическом исследовании шестикратных интегралов $B_{ij}^{\varepsilon\Delta}$ возникают некоторые трудности, связанные с тем, что входящая через θ в подинтегральную функцию δ -функция играет при интегрировании важную роль. Одна квадратура в интегралах $B_{ij}^{\varepsilon\Delta}$ опадает из-за δ -функции. Но дальнейшее интегрирование по пятиразмерной гиперповерхности приводит к трудностям геометрической природы, которые зависят от формы обтекаемого тела.

Остается найти коэффициенты $a_m^{\pm}$.

Рассмотрим поэтому систему интегральных уравнений (1.3.3). Для этой системы можно провести метод итераций для определения $a_m^{(n)\pm}$ по следующей схеме:

$$a_m^{(n)\pm} = \iiint_{\Omega^{\pm}} \psi_m^{\pm} V^{\pm} f_{n-1}^{\pm} d\bar{u} \quad n = 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.18)$$

где n - номер приближения.

В качестве нулевого приближения для f возьмем максвелловскую функцию распределения f_0 (1.2.2), которая характеризует

течение невозмущенного набегающего потока.

Это означает, что коэффициенты $a_m^\pm$ в нулевом приближении имеют вид

$$a_0^{(0)-} = 1 \quad a_0^{(0)+} = 0 \quad a_k^{(0)\pm} = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots \quad (1.4.19)$$

Подставляя эти выражения для $a_m^\pm$ в (1.4.9)–(1.4.17), получим для N , Q и Φ в нулевом приближении

$$N^{(0)} = \beta_0^- \quad Q^{(0)} = A_0^- \quad \Phi^{(0)} = B_{00}^- \quad (1.4.20)$$

где β_0^- , A_0^- и B_{00}^- могут быть вычислены по (1.4.11), (1.4.14) и (1.4.17).

$\Phi^{(0)}$ можно найти иначе. Для невозмущенного внешнего потока в силу равновесности, (1.4.19) и (1.4.20) имеет место формула [2]

$$\Phi^{(0)} = Q^{(0)-} \xi_0 = Q^{(0)} \xi_0 = A_0^- \xi_0 \quad (1.4.21)$$

Отсюда видно, что для определения $N^{(0)}$, $Q^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$ нужно вычислить только трехкратные интегралы β_0^- и A_0^- .

По (1.4.18) имеем для $a_m^\pm$ в первом приближении

$$a_m^{(1)\pm} = \iiint_{\Omega^\pm} \Psi_m^\pm V^\pm \xi_0^\pm d\bar{u} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.22)$$

Подставляя (1.4.20) и (1.4.21) в (1.4.1) и принимая во внимание (1.4.2)–(1.4.4), получим для $V^\pm \xi_0^\pm$

$$V^- \xi_0^- = \xi_0 \mathcal{I}_1(\bar{z}, \bar{u}) \quad (1.4.23)$$

$$V^+ \xi_0^+ = \xi_0^* \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) + \xi_0 \mathcal{I}_2(\bar{z}, \bar{u}) \quad (1.4.24)$$

где

$$J_{\kappa}(\bar{z}, \bar{u}) = \int_0^{\tau_{\kappa}} A_0^{-}(\bar{z} - \tau \bar{u}, \bar{u}) \exp \left\{ - \int_0^{\tau} A_0^{-}(\bar{z} - q \bar{u}, \bar{u}) dq \right\} d\tau \quad (1.4.25)$$

$$\kappa = 1, 2 \quad ; \quad \tau_1 = \infty \quad , \quad \tau_2 = \tau_s$$

$$f_0^* = \frac{1}{u_n} \beta_0^{-} \tilde{\Theta}(\bar{u}) \quad (1.4.26)$$

$$\Pi(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) = \exp \left\{ - \int_0^{\tau_s} A_0^{-}(\bar{z} - q \bar{u}, \bar{u}) dq \right\} \quad (1.4.27)$$

Интегралы (1.4.25) легко вычисляются. Мы получим

$$J_{\kappa}(\bar{z}, \bar{u}) = 1 - e^{-z_{\kappa}(\bar{z}, \bar{u})} \quad \kappa = 1, 2 \quad (1.4.28)$$

где $z_1 = \infty$ и $z_2 = \int_0^{\tau_s} A_0^{-}(\bar{z} - q \bar{u}, \bar{u}) dq$.

Подставляя (1.4.28) в (1.4.23) и (1.4.24), будем иметь

$$V^{-} f_0^{-} = f_0 \quad (1.4.29)$$

$$V^{+} f_0^{+} = f_0 + \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) [f_0^* - f_0] \quad (1.4.30)$$

и ввиду (1.4.22)

$$a_m^{(1)-} = \iiint_{\Omega^{-}} \Psi_m^{-} f_0 d\bar{u} \quad (1.4.31)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_m^{(1)+} = \bar{a}_m^{(1)+} + \tilde{a}_m^{(1)+} \quad (1.4.32)$$

где

$$\bar{a}_m^{(1)+} = \iiint_{\Omega^{+}} \Psi_m^{+} f_0^* \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u} \quad (1.4.33)$$

$$\tilde{a}_m^{(1)+} = \iiint_{\Omega^{+}} \Psi_m^{+} f_0 [1 - \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s)] d\bar{u} \quad (1.4.34)$$

Подставляя теперь (1.3.1) в (1.4.31)–(1.4.34) и принимая во внимание (1.3.2), (1.1.15) и (1.1.16), получим окончательно для коэффициентов $a_m^{(1)\pm}$

$$a_0^{(1)-} = \alpha_{00}^{-} \quad a_k^{(1)-} = 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4.35)$$

$$a_m^{(1)+} = \bar{a}_m^{(1)+} + \tilde{a}_m^{(1)+} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.36)$$

где $\bar{a}_m^{(1)+}$ могут быть найдены по (1.4.33) и

$$\tilde{a}_0^{(1)+} = \alpha_{00}^{+} + \chi_0^{+} \quad \tilde{a}_k^{(1)+} = \chi_k^{+} \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4.37)$$

Здесь

$$\chi_m^{+} = - \iiint_{\Omega^{+}} \psi_m^{+} \xi_0 \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.38)$$

С помощью коэффициентов $a_m^{(1)\pm}$ можно теперь найти выражения для макропараметров газа в первом приближении. Как видели в § 3, все макропараметры газа выражаются через $\{M_i\}^{\pm}$. Подставляя (1.4.35)–(1.4.38) в (1.3.6) и принимая во внимание (1.1.14) и (1.3.1), можно $\{M_i^{(1)}\}^{\pm}$ записать в виде

$$\{M_i^{(1)}\}^{\pm} = \{\alpha_{i0}\}^{\pm} + \gamma_i^{+} + \eta_i^{+} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.39)$$

где

$$\alpha_{i0}^{\pm} = \iiint_{\Omega^{\pm}} \xi_0 \varphi_i d\bar{u} \quad (1.4.40)$$

$$\gamma_i^{+} = - \iiint_{\Omega^{+}} \varphi_i \xi_0 \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u} \quad (1.4.41)$$

$$\eta_i^{+} = \iiint_{\Omega^{+}} \varphi_i \xi_0^{*} \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u} \quad (1.4.42)$$

и φ_i - функции из (1.1.7).

Следовательно макропараметры газа будут окончательно вычислены, если будут найдены значения интегралов (1.4.40) - (1.4.42). Все эти интегралы можно асимптотически оценить, если $h \rightarrow \infty$. При этом можно отметить, что вблизи границы тела возникает неравномерность асимптотики макропараметров газа. Эта неравномерность в основном выявляется при оценке интегралов (1.4.42), так как вблизи границы $\tau_s \rightarrow 0$, $\Pi_0 \rightarrow 1$ и $\gamma_i^+ \rightarrow -\alpha_{i0}^+$.

Из-за неравномерности асимптотики $\{M_i\}^+$ вблизи границы можно уже в первом приближении делать выводы о поведении макропараметров газа в пограничном слое. Для определения потоков массы, импульса и энергии на теле, например их зависимость от $\bar{z}_s$, недостаточно первого приближения, нужно рассматривать второе.

Окончательно можно сказать, что при сочетании трех методов

- 1) Метод интегральных моментных уравнений
- 2) Метод итераций
- 3) Асимптотический метод

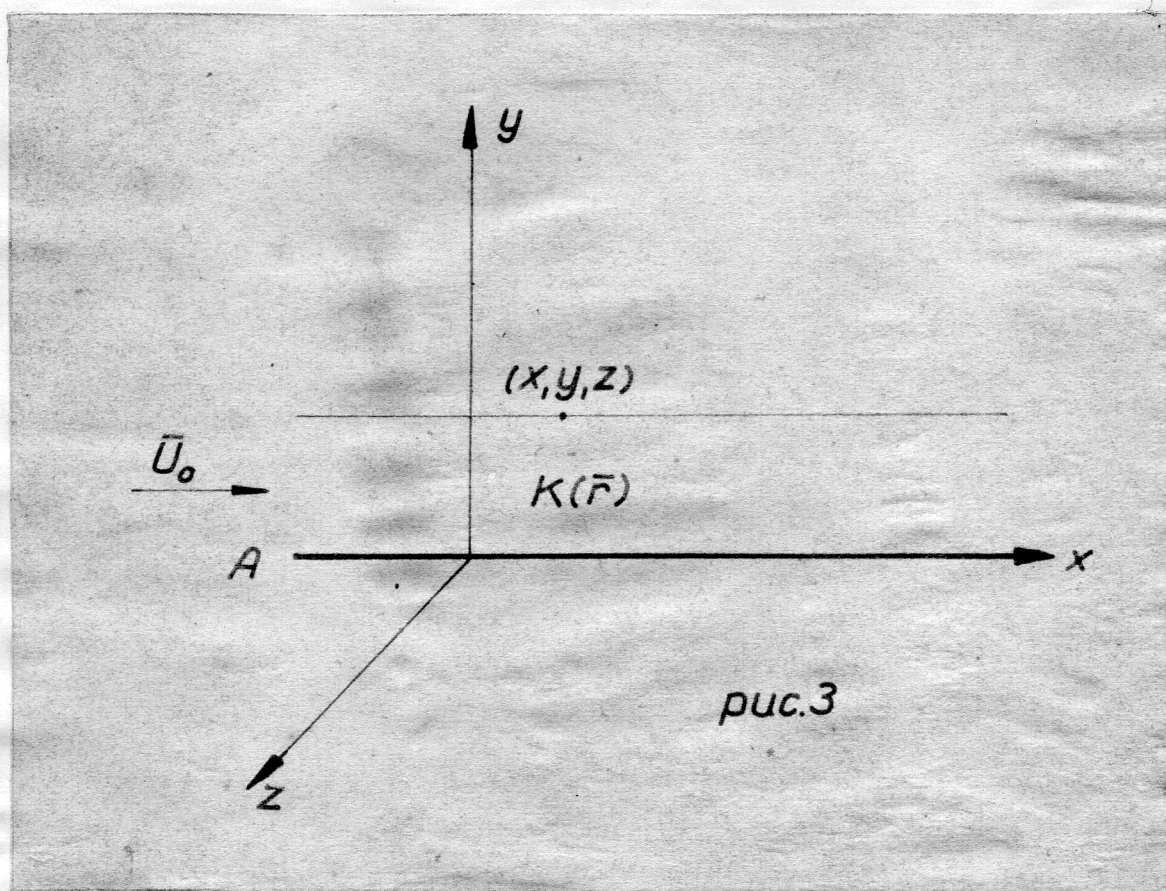
многие задачи гиперзвуковой аэродинамики разреженных газов могут быть аналитически решены до конца. Дело сводится к асимптотическому исследованию возникающих многократных интегралов. Успех при этом зависит от того, как мы сумеем эти интегралы оценить. Но это зависит от формы обтекаемого тела.

ГЛАВА II.

ГИПЕРЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ОКОЛО
БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ.

§ I. Первое приближение для макропараметров газа.

Рассмотрим гиперзвуковое, продольное обтекание пластинки $y=0$ (рис.3) одноатомным разреженным газом, средняя скорость которого равна $\bar{U}_0 = \{1, 0, 0\}$



A - пластинка $y=0$
 $K(\bar{r})$ - конус с вершиной в точке (x, y, z) , под которым видна пластинка $y=0$.

Допустим, что молекулы являются гладкими упругими шарами и их отражение от стенки диффузное, а температура поверхности не отличается от температуры газа.

Нужно найти асимптотическое поведение макропараметров газа при $h \rightarrow \infty$.

Воспользуемся изложенным в главе I методом решения задачи об обтекании тел разреженным газом.

При решении задачи исходим из кинетических уравнений С.В.Валландера (I.I.I). В рассматриваемом случае $u_n = u_y$ и $\tau_s = \frac{y}{u_y}$. Функция распределения f терпит разрыв на плоскости $u_y = 0$.

Поэтому целесообразно представить функцию распределения в виде разложения (I.I.IO) по полиномам $\psi_m^\pm$, ортогональным в областях $u_y > 0$ и $u_y < 0$. Это значит, что здесь Ω^+ означает область, где $u_y > 0$ и Ω^- - область, где $u_y < 0$.

Дальнейшие рассуждения проводятся как в предыдущей главе. Как мы видели, макропараметры газа выражаются через $\{M_i\}^\pm$, которые в первом приближении имеют вид

$$\{M_i^{(n)}\}^\pm = \{\alpha_{i0}\}^\pm + \gamma_i^+ + \eta_i^+ \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.I.I})$$

где

$$\alpha_{i0}^\pm = \iiint_{\Omega^\pm} f_0 \psi_i d\bar{u} \quad (\text{II.I.2})$$

$$\gamma_i^+ = - \iiint_{u_y > 0} \psi_i f_0 \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u} \quad (\text{II.I.3})$$

$$\eta_i^+ = \iiint_{u_y > 0} \psi_i f_0^* \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u} \quad (\text{II.I.4})$$

причем ψ_i и f_0 - функции из (I.I.7), (I.2.2) и по (I.4.26) и (I.4.27)

$$f_0^* = \frac{2h^2}{\pi} \beta_0^- e^{-hu^2} \quad (\text{П.1.5})$$

$$\Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) = \exp \left\{ - \int_0^{\frac{y}{u_y}} A_0^-(\bar{z} - q\bar{u}, \bar{u}) dq \right\} \quad (\text{П.1.6})$$

Здесь β_0^- и A_0^- вычисляются по (I.4.II) и (I.4.I4).

Имеем:

$$\beta_0^- = - \iiint_{u_y < 0} u_y f_0 d\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \quad (\text{П.1.7})$$

$$A_0^- = \iiint_{u_y < 0} |\bar{u} - \bar{u}_0| f_0(\bar{u}_0) d\bar{u}_0 \approx \frac{1}{2} |\bar{u} - \bar{u}_0| \quad (\text{П.1.8})$$

где A_0^- - асимптотически оценивалось по методу Лапласа [43 - 45] при $h \rightarrow \infty$.

Подставляя (П.1.7) и (П.1.8) в (П.1.5) и (П.1.6), получим

$$f_0^* = \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} e^{-hu^2} \quad (\text{П.1.9})$$

$$\Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) = \exp \left\{ - \frac{1}{2} |\bar{u} - \bar{u}_0| \frac{y}{u_y} \right\} \quad (\text{П.1.10}).$$

Принимая во внимание (I.2.2), (П.1.9) и (П.1.10) интегралы (П.1.2) - (П.1.4) можно переписать в виде

$$\alpha_{i0}^\pm = \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} \iiint_{\Omega^\pm} \varphi_i e^{-h(\bar{u} - \bar{u}_0)^2} d\bar{u} \quad (\text{П.1.11})$$

$$\gamma_i^+ = - \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} \iiint_{u_y > 0} \varphi_i e^{-h(\bar{u} - \bar{u}_0)^2} \exp \left\{ - \frac{1}{2} |\bar{u} - \bar{u}_0| \frac{y}{u_y} \right\} d\bar{u} \quad (\text{П.1.12})$$

$$\eta_i^+ = \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} \iiint_{u_y > 0} \varphi_i e^{-hu^2} \exp \left\{ - \frac{1}{2} |\bar{u} - \bar{u}_0| \frac{y}{u_y} \right\} d\bar{u} \quad (\text{П.1.13})$$

Чтобы получить выражения для трех основных макропараметров газа в первом приближении, а именно: для плотности скорости и температуры газа, нужно по (I.3.33) - (I.3.15) и (II.1.1) вычислить интегралы (II.1.11) - (II.1.13) при $i = 0, 1, \dots, 6$. Этим мы сейчас и займемся.

§ 2. Вычисление $\alpha_{i0}^{\pm}$ и γ_i^+ ($i = 0, 1, \dots, 6$).

Как было отмечено в главе I § 2, интегралы $\alpha_{ij}^{\pm}$ вычисляются точно, когда интегрирование производится по полупространству скоростей. Это значит, что в нашем случае $\alpha_{i0}^{\pm}$ вычисляются довольно легко.

Подставляя (I.1.7) в (II.1.11) и произведя интегрирование по $u_y < 0$ и $u_y > 0$, получим для $\alpha_{i0}^{\pm}$ ($i = 0, 1, \dots, 6$)

$$\begin{aligned} \alpha_{00}^{\pm} = \alpha_{10}^{\pm} &= \frac{1}{2} & \alpha_{20}^{\pm} &= \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}h} & \alpha_{30}^{\pm} &= 0 \\ \alpha_{40}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2h} \right) & \alpha_{50}^{\pm} = \alpha_{60}^{\pm} &= \frac{1}{4h} \end{aligned} \quad (\text{II.2.1})$$

При вычислении γ_i^+ переходим в интегралах (II.1.12) к сферическим координатам по формулам

$$\begin{aligned} u_x - 1 &= r \sin \theta \sin \varphi \\ u_y &= r \cos \theta \\ u_z &= r \sin \theta \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{II.2.2})$$

После преобразования координат интегралы (II.1.12) перепишутся в виде

$$\gamma_i^+ = - \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_i(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta \exp \left\{ -hr^2 - \frac{y}{2 \cos \theta} \right\} dr d\theta d\varphi \quad (\text{II.2.3})$$

Подставляя сюда (I.1.7) эти интегралы тоже можно вычислить точно.

Если ввести обозначения

$$F_0 = \gamma_0^+ \quad F_1 = \gamma_2^+ \quad F_2 = \gamma_4^+ + \gamma_5^+ + \gamma_6^+ \quad (\text{П.2.4})$$

$$\begin{aligned} n_s &= \gamma_0^+ & n_s U_{sx} &= \gamma_1^+ & n_s U_{sy} &= \gamma_2^+ \\ n_s T_s &= n_s (T_{sx} + T_{sy} + T_{sz}) = \gamma_4^+ + \gamma_5^+ + \gamma_6^+ \end{aligned} \quad (\text{П.2.5})$$

и принять во внимание (П.2.1), (П.1.1) и (1.3.13)–(1.3.15), получим для макропараметров газа в первом приближении следующие формулы:

$$\begin{aligned} n^{(1)}(y, h) &= 1 + n_s + F_0 \\ U_x^{(1)}(y, h) &= 1 + \frac{n_s}{n^{(1)}} (U_{sx} - 1) \\ U_y^{(1)}(y, h) &= \frac{1}{n^{(1)}} (n_s U_{sy} + F_1) \\ T^{(1)}(y, h) &= \frac{2h}{3n^{(1)}} \left(1 + \frac{3}{2h} + n_s T_s - n^{(1)} U^{(1)2} + F_2 \right) \end{aligned} \quad (\text{П.2.6})$$

где

$$\begin{aligned} F_0 &= -\frac{1}{2} \left[e^{-y/2} + \frac{y}{2} \text{Ei}\left(-\frac{y}{2}\right) \right] \\ F_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \left[\left(\frac{y}{2} - 1\right) e^{-y/2} + \frac{y^2}{4} \text{Ei}\left(-\frac{y}{2}\right) \right] \\ F_2 &= \left(1 + \frac{3}{2h}\right) F_0 + \frac{3y}{16h} \cdot \frac{\pi - 6}{\pi - 2} e^{-y/2} \end{aligned}$$

В формулах (П.2.6) неизвестными являются еще n_s , U_{sx} , U_{sy} , T_s . Вычислением этих величин займемся в следующем параграфе.

§3. Асимптотика функций n_s , U_{sx} , U_{sy} , T_s при $h \rightarrow \infty$.

Исследуем теперь асимптотическое поведение n_s , U_{sx} , U_{sy} , T_s , т.е. макропараметров потока частиц рожденных на стенке при $h \rightarrow \infty$, $y \geq 0$.

По (П.2.5), (П.1.13) и (1.1.7) для плотности имеем

$$n_s = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \iiint_{u_y > 0} \exp \left\{ -hu^2 - \frac{1}{2} |\bar{u} - \bar{U}_0| \frac{y}{u_y} \right\} d\bar{u} \quad (\text{П.3.1})$$

После тривиальной оценки по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$ интегралов по u_x и u_z остается

$$n_s \approx \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_0^\infty \exp \left\{ -hu_y^2 - \frac{y}{2u_y} \sqrt{1+u_y^2} \right\} du_y \quad (\text{П.3.2})$$

Асимптотическое поведение этого интеграла при больших h очевидно неравномерно по параметру y в окрестности точки $y = 0$. Структура этой неравномерности легко раскрывается, если сделать в (П.3.2) следующую замену:

$$t = u_y \sqrt{h} \quad (\text{П.3.3})$$

Тогда

$$n_s \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} dt \quad (\text{П.3.4})$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{h} y \quad (\text{П.3.5})$$

Таким образом, n_s практически зависит лишь от параметра α , который при больших h может принимать любые неотрицательные значения в зависимости от того, насколько близко к нулю y . При $M \ll \frac{1}{y}$ и $M \gg \frac{1}{y}$ можно воспользоваться асимптотическими разложениями интеграла (П.3.4) для больших и малых α , полученными в [46]. Пусть $\alpha \rightarrow \infty$. Тогда после замены

$$t = \alpha^{1/3} \xi \quad (\text{П.3.6})$$

интеграл (П.3.4) перепишется в виде

$$n_s \approx \frac{\alpha^{1/3}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^{2/3} \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi} \right)} d\xi \quad (\text{П.3.7})$$

Этот интеграл оценим по методу Лапласа и получим

$$n_s \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \exp \left\{ -3 \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2/3} \right\} \left[1 + O(\alpha^{-2/3}) \right] \quad \alpha \rightarrow \infty \quad (\text{П.3.8})$$

Допустим теперь, что $\alpha \rightarrow 0$. В этом случае применим к (П.3.4) преобразование Лапласа.

Будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(n_s) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\mu \alpha} \int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} dt d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{\mu^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t + \frac{1}{\mu}} dt \end{aligned} \quad (\text{П.3.9})$$

Разложение интеграла по степеням $\frac{1}{\mu}$ известно [45], и мы получим

$$\mathcal{L}(n_s) = \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left\{ \frac{1}{2} \Psi(k+1) + \ln \mu \right\}}{k! \mu^{2k+2}} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1) \mu^{2k+3}} \quad (\text{П.3.10})$$

где $\Psi(k+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - C$, $\Psi(1) = -C$
и C - постоянная Эйлера.

Принимая во внимание преобразования Лапласа

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\alpha^k}{k!}\right\} = \frac{1}{\mu^{k+1}}, \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\alpha^k}{k!} [\Psi(k+1) - \ln \alpha]\right\} = \frac{\ln \mu}{\mu^{k+1}} \quad (\text{П.3.11})$$

мы непосредственно получим выражение для n_s :

$$n_s = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left\{ \frac{1}{2} \Psi(k+1) + \Psi(2k+2) - \ln \alpha \right\}}{k! (2k+1)!} \alpha^{2k+1} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k \alpha^{2k+2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1) (2k+2)!} \quad (\text{П.3.12})$$

В силу (П.3.8) и (П.3.12) можно для n_s написать следующие выражения

$$n_s \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \exp \left\{ -3 \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2/3} \right\} \left[1 + O(\alpha^{-2/3}) \right] & \alpha \rightarrow \infty \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha \ln \alpha + O(\alpha) & \alpha \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{П.3.13})$$

Если же $y = O(M^{-1})$, то интеграл (П.3.4) приходится вычислять численно [48].

Аналогичная неравномерность асимптотики наблюдается и у других макропараметров U_{sx} , U_{sy} , T_s .

Принимая во внимание (П.2.5), (П.1.13), (1.1.7), оценивая интегралы по u_x и u_z по методу Лапласа и переходя потом по (П.3.6) от интегрирования по u_y к интегрированию по t , получим для оставшихся макропараметров следующие выражения

$$n_s U_{sx} \approx \frac{\alpha}{2h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} dt \quad (\text{П.3.14})$$

$$n_s U_{sy} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}h} \int_0^{\infty} t e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} dt \quad (\text{П.3.15})$$

$$n_s T_s \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}h} \int_0^{\infty} (1+t^2) e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} dt \quad (\text{П.3.16})$$

Полученные интегралы оцениваются таким же образом как n_s . В результате имеем

$$n_s U_{sx} \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}h} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3} \exp\left\{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}\right\} \left[1 + O(\alpha^{-2/3})\right] & \alpha \rightarrow \infty \\ \frac{-1}{2\sqrt{\pi}h} \alpha \left\{\ln \alpha + \frac{3}{2}C + O(\alpha)\right\} & \alpha \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{П.3.17})$$

$$n_s U_{sy} \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}h} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/3} \exp\left\{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}\right\} \left[1 + O(\alpha^{-2/3})\right] & \alpha \rightarrow \infty \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}h} \left\{1 - \sqrt{\pi}\alpha - \alpha^2 \ln \alpha + O(\alpha^2)\right\} & \alpha \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{П.3.18})$$

$$n_s T_s \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}h} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}\right] \exp\left\{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}\right\} \left[1 + O(\alpha^{-2/3})\right] & \alpha \rightarrow \infty \\ \frac{1}{h} \left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha \ln \alpha + O(\alpha)\right\} & \alpha \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{П.3.19})$$

Подставляя (П.3.13), (П.3.17) - (П.3.19) в (П.2.6) мы окончательно получим асимптотические формулы для макропараметров газа. Как видно из этих формул, мы уже в первом приближении можем делать выводы о поведении макропараметров газа в пограничном слое.

Под пограничным слоем подразумевается обычно бесконечно тонкий слой, исчезающий вместе с характеризующим его малым параметром. Порядок толщины этого слоя при асимптотическом подходе связывается с состоянием перехода от одной асимптотики (дальней) к другой (ближней). В нашем случае толщина пограничного слоя обратно пропорциональна M . Внутренняя структура слоя характеризуется интегралами типа (П.3.4), (П.3.14) - (П.3.16), весьма типичными для аэродинамики разреженных газов [48], [49].

§ 4. Расчет примеров и результаты

В конце работы в приложении 1 помещены графики безразмерных макропараметров газа $n^{(1)}$, $V_x^{(1)}$, $V_y^{(1)}$, $T^{(1)}$ (отнесенных к параметрам газа невозмущенного набегающего потока) как функции от y и таблицы расчета.

Вычисления проводились по формулам (П.2.6), (П.3.13), (П.3.17) - (П.3.19) при различных числах M , а именно для $M = 5, 5; 22; 109$. Расчет проводился следующим образом:

фиксировались $h = \frac{5}{6} M^2$ и $\alpha = \frac{\sqrt{h}}{2} y$; отсюда нашли соответствующие значения M и y . При $0 \leq \alpha \leq 8 \cdot 10^{-2}$ мы использовали формулы (П.3.13), (П.3.17) - (П.3.19) для $\alpha \rightarrow 0$, но когда $10 \leq \alpha \leq \infty$ мы взяли те же формулы для $\alpha \rightarrow \infty$. При $5 \cdot 10^{-1} \leq \alpha \leq 6$, т.е. $\alpha = O(1)$, интегралы (П.3.4), (П.3.14) - (П.3.16) вычислялись численно по методу Гаусса [50]. Этот метод состоит коротко в следующем:

Рассмотрим интеграл (П.3.4)

$$n_s \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} dt \quad (\text{П.4.1})$$

Введем новую переменную

$$z = \frac{t}{1+t} \quad (\text{П.4.2})$$

Отсюда получаем обратную зависимость

$$t = \frac{z}{1-z} \quad (\text{П.4.3})$$

и (П.4.1) примет вид

$$n_s \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp \left\{ - \frac{z^3 + \alpha(1-z)^3}{z(1-z)^2} \right\} \frac{dz}{(1-z)^2} \quad (\text{П.4.4})$$

К этому интегралу применили метод Гаусса, т.е.использовали следующую вычислительную формулу:

$$\int_A^B f(\xi) d\xi = \frac{B-A}{2} \left\{ C_1 f(\xi_1) + C_2 f(\xi_2) + \dots + C_n f(\xi_n) \right\} \quad (\text{П.4.5})$$

где

$$\xi_i = \frac{B+A}{2} + \frac{B-A}{2} x_i \quad (\text{П.4.6})$$

и x_i - абсциссы, C_i - коэффициенты и n - число ординат. Расчет проводился для $n = 8$.

В этом случае

$$\begin{array}{ll} x_{1,8} = -0,960289 & C_{1,8} = 0,101228 \\ x_{2,7} = -0,796666 & C_{2,7} = 0,222381 \\ x_{3,6} = -0,525532 & C_{3,6} = 0,313706 \\ x_{4,5} = -0,183434 & C_{4,5} = 0,362683 \end{array} \quad (\text{П.4.7})$$

Как видно из графиков, кривая для макропараметров газа, полученная численным интегрированием при $\alpha = O(1)$ хорошо соединяет кривые, полученные из расчетов по асимптотическим формулам при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$.

Из полученных формул и поведения кривых, для макропараметров газа можно делать следующие выводы:

Все значения макропараметров газа в первом приближении переходят при $y \rightarrow \infty$ в их значения в нулевом приближении, т.е. принимают значения как в невозмущенном набегающем потоке.

Вблизи стенки все параметры претерпевают резкие изменения, которые тем резче, чем больше M . При возрастании M кривые для $U_x^{(1)}$ и $T^{(1)}$ вблизи $y = 0$ больше и больше прижимаются к оси ординат и когда $M = \infty$, мы имеем разрыв в составляющей скорости $U_x^{(1)}$ и температуре $T^{(1)}$. При $y = 0$ $U_x^{(1)} = \frac{1}{2}$, а $T^{(1)} \sim h$.

Интересно поведение кривых $U_y^{(1)}$ и $n^{(1)}$. На стенке $U_y^{(1)} = 0$, потом при возрастании y $U_y^{(1)}$ отрицательна и при $y \rightarrow \infty$ $U_y^{(1)} \rightarrow 0$. Разрыв в этой составляющей скорости при $M \rightarrow \infty$ не наблюдается. На пластинке $n^{(1)} = 1$. Когда y растет $n^{(1)}$ уменьшается и при $y \rightarrow \infty$, $n^{(1)} \rightarrow 1$. При возрастании M минимальное значение $n^{(1)}$ уменьшается, но остается всегда больше $\frac{1}{2}$, причем минимальное значение достигается тогда, когда $\alpha = O(1)$.

ГЛАВА III.

АСИМПТОТИКА МАКРОПАРАМЕТРОВ ГАЗА ПРИ ГИПЕРЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ОКОЛО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ.

§ I. Первое приближение для параметров газа.

Рассмотрим гиперзвуковое продольное обтекание бесконечно тонкой пластинки $y=0$, $x \geq 0$ (рис.4) одноатомным разреженным газом, средняя скорость которого равна $\bar{U}_0 = \{1, 0, 0\}$

На рисунке 4 A - пластинка $y=0, x \geq 0$

$K(\bar{z})$ - конус с вершиной в точке (x, y, z) , под которым видна полубесконечная пластинка.

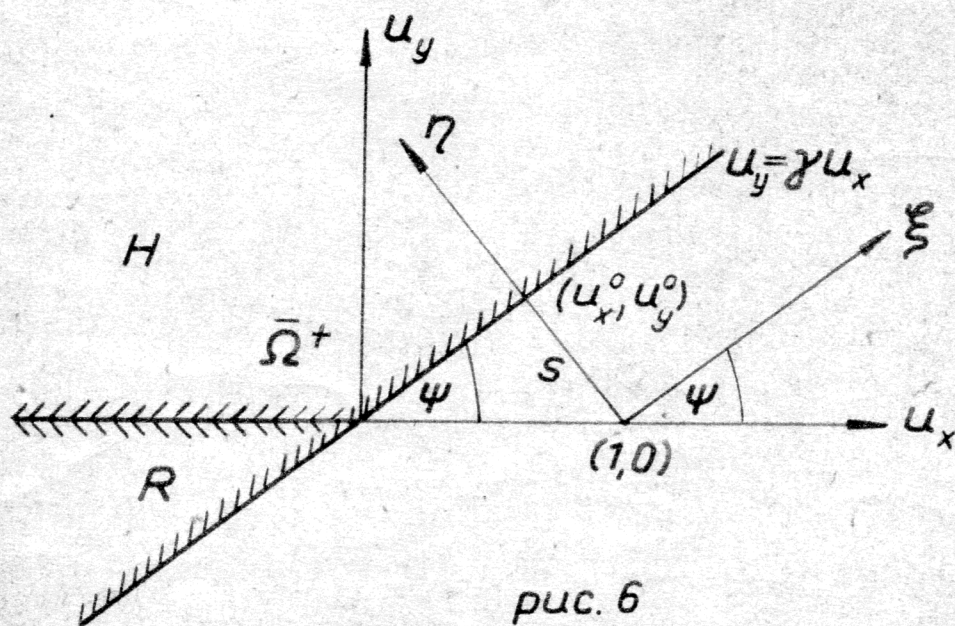
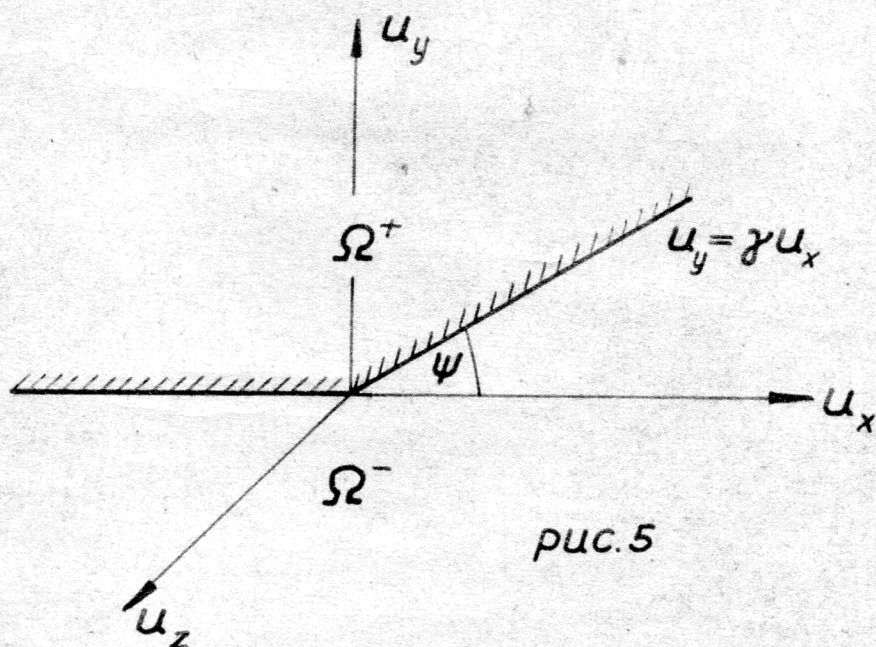
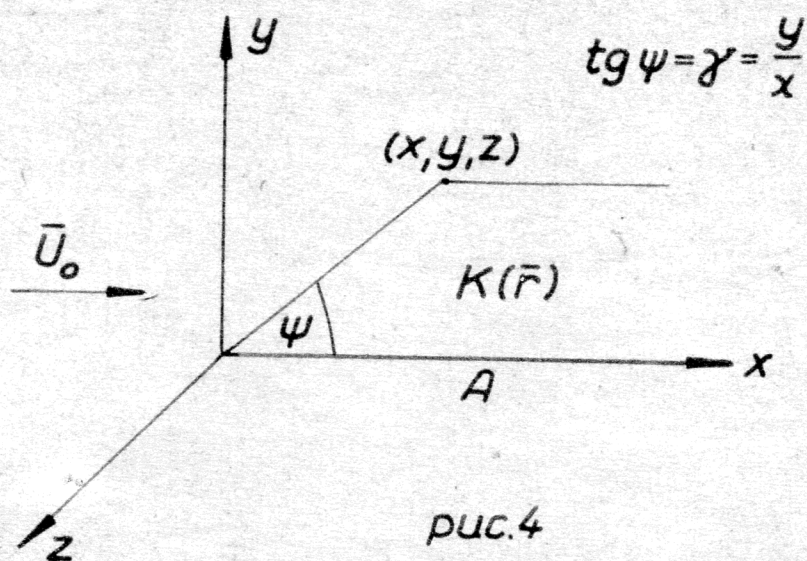
Молекулы газа и температура поверхности пластинки такие же, как во второй главе.

Найдем асимптотические выражения для макропараметров газа при $h \rightarrow \infty$.

В рассматриваемом случае снова исходим из кинетических уравнений С.В.Валландера (I.I.I), где $u_n = u_y$ и $\tau_s = \frac{y}{u_y}$. Функция распределения f терпит разрыв на некоторой конечной поверхности (рис.5), которая делит пространство скоростей на две части Ω^+ и Ω^- . Поэтому функцию распределения можно представить в виде разложения (I.I.IO) по полиномам $\psi_m^\pm$, ортогональным в областях Ω^+ и Ω^- . Дальнейшие рассуждения проводятся как в главе I.

Так как макропараметры газа выражаются через $\{M_i\}^\pm$, мы для них в первом приближении имеем (I.4.39)

$$\{M_i^{(1)}\}^\pm = \{\alpha_{i0}\}^\pm + \gamma_i^\pm + \eta_i^\pm \quad i=0,1,2,\dots \quad (\text{III.I.I})$$



где

$$\alpha_{i0}^+ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i f_0 d\bar{u} \quad (\text{III.I.2})$$

$$\alpha_{i0}^- = \alpha_{i0}^{-*} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\gamma u_x} \int_0^{\infty} \varphi_i f_0 d\bar{u} \quad (\text{III.I.3})$$

$$\gamma_i^+ = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i f_0 \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u} \quad (\text{III.I.4})$$

$$\eta_i^+ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i f_0^* \Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u} \quad (\text{III.I.5})$$

и φ_i , f_0 , α_{i0}^{-*} — функции из (I.I.7), (I.2.2), (II.2.I) и по (I.4.26) и (I.4.27)

$$f_0^* = \frac{2h^2}{\pi} \beta_0^- e^{-hu^2} \quad (\text{III.I.6})$$

$$\Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) = \exp \left\{ - \int_0^{\frac{y}{\bar{u}_y}} A_0^-(\bar{z} - q\bar{u}, \bar{u}) dq \right\} \quad (\text{III.I.7})$$

β_0^- и A_0^- вычисляются по (I.4.II) и (I.4.I4).

В дальнейшем все величины, обозначенные в этой главе со "*" принимают значения, полученные в случае бесконечной пластинки.

Для β_0^- и A_0^- будем иметь

$$\beta_0^- = - \iiint_{u_y < 0} u_y f_0 d\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}h} \quad (\text{III.I.8})$$

$$A_0^- = A_0^{-*} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\gamma u_x} \int_0^{\infty} f_0(\bar{u}_1) |\bar{u} - \bar{u}_1| d\bar{u}_1 \approx A_0^{-*} (1 + \operatorname{erf} \sqrt{h} \gamma) \quad (\text{III.I.9})$$

Здесь A_0^- оценивался по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$. Подставляя

(III.1.8) и (III.1.9) в (III.1.6) и (III.1.7), получим

$$f_0^* = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h u^2} \quad (\text{III.1.10})$$

$$\Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) = \exp \left\{ -A_0^{-*} \left[\frac{y}{u_y} + \int_0^{\frac{y}{u_y}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{h} \frac{y - q u_y}{x - q u_x} \right) dq \right] \right\} \quad (\text{III.1.11})$$

Переходя в оставшемся в (III.1.11) интеграле от интегрирования по q к интегрированию по t , где

$$t = \frac{y - q u_y}{x - q u_x}$$

интегрируя потом по частям и оценивая полученный интеграл по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$, получим

$$\int_0^{\frac{y}{u_y}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{h} \frac{y - q u_y}{x - q u_x} \right) dq \approx \frac{y}{u_y} \operatorname{erf} \sqrt{h} \gamma \quad (\text{III.1.12})$$

По (III.1.9), (III.1.11) и (III.1.12), будем иметь

$$\Pi_0(\bar{z}, \bar{u}, \tau_s) \approx e^{-A_0^{-*} \frac{y}{u_y}} \quad (\text{III.1.13})$$

Принимая во внимание (I.2.2), (III.1.9), (III.1.10) и (III.1.13), запишем интегралы (III.1.2)-(III.1.5) в виде:

$$\alpha_{i0}^+ = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{u_y}{\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2} d\bar{u} \quad (\text{III.1.14})$$

$$\alpha_{i0}^- = \alpha_{i0}^{-*} + \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\gamma u_x} \int_0^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2} d\bar{u} \quad (\text{III.1.15})$$

$$\gamma_i^+ = -\left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{u_y}{\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\bar{u} - \bar{U}_0| \frac{y}{u_y} (1 + \operatorname{erf} \sqrt{h} \gamma) \right\} d\bar{u} \quad (\text{III.1.16})$$

$$\eta_i^+ = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i e^{-hu^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}|\bar{u}-\bar{U}_0|\frac{y}{u_y}(1+\operatorname{erf}\sqrt{h}\gamma)\right\} d\bar{u} \quad (\text{III.1.I7})$$

Займемся теперь вычислением трех основных макропараметров газа $n^{(i)}$, $\bar{U}^{(i)}$, $T^{(i)}$, т.е. вычислим интегралы (III.1.I4)-(III.1.I7) для $i = 0, 1, \dots, 6$.

§ 2. Асимптотика $\alpha_{i0}^{\pm}$ и γ_i^+ ($i = 0, 1, \dots, 6$)

По (III.1.I5) имеем

$$\alpha_{i0}^- = \alpha_{i0}^{-*} + \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\gamma u_x} \varphi_i e^{-h(\bar{u}-\bar{U}_0)^2} d\bar{u} \quad (\text{III.2.I})$$

В этом выражении α_{i0}^{-*} принимают значения из (II.2.I), а оставшиеся интегралы легко оцениваются по методу Лапласа, если в них подставим выражения для φ_i из (1.1.7). После оценки получим для α_{i0}^-

$$\alpha_{00}^- = \frac{1}{2}(1+\operatorname{erf}\sqrt{h}\gamma), \quad \alpha_{10}^- \approx \alpha_{00}^-, \quad \alpha_{20}^- \approx -\frac{e^{-h\gamma^2}}{2\sqrt{\pi h}} = \alpha_0^- \quad (\text{III.2.2})$$

$$\alpha_{30}^- = 0, \quad \alpha_{40}^- \approx \alpha_{00}^- \left(1 + \frac{1}{2h}\right), \quad \alpha_{50}^- \approx \gamma \alpha_{20}^- + \frac{\alpha_{00}^-}{2h}, \quad \alpha_{60}^- = \frac{\alpha_{00}^-}{2h}$$

Из (III.2.2) видно, что все α_{i0}^- могут быть выражены через α_{00}^- и α_0^- . Выписанные формулы верны для $\gamma \geq 0$ и переходят в формулы для α_{i0}^{-*} (II.2.I), когда $\gamma \rightarrow 0$.

Найдем теперь выражения для α_{i0}^+ . По (III.1.I4) имеем

$$\alpha_{i0}^+ = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\frac{u_y}{\gamma}}^{\infty} \varphi_i e^{-h(\bar{u}-\bar{U}_0)^2} d\bar{u} \quad (\text{III.2.3})$$

При вычислении α_{i0}^+ интегралы по u_z вычисляются точно. После интегрирования по u_z , получим

$$\alpha_{30}^+ = 0 \quad \alpha_{60}^+ = \frac{\alpha_{00}^+}{2h} \quad (\text{III.2.4})$$

$$\alpha_{i0}^+ = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i(u_x, u_y) e^{-h[(u_x-1)^2 + u_y^2]} du_x du_y \quad i=0,1,2,4,5 \quad (\text{III.2.5})$$

Интегралы (III.2.5) точно не берутся, поэтому исследуем их асимптотически.

Из (III.2.5) видно, что точка максимума подинтегральной функции лежит в точке (1,0). Но эта точка лежит вне области интегрирования $\bar{\Omega}^+$ (рис.6). Так что основной вклад в значение интеграла (III.2.5) дает окрестность точки (u_x^0, u_y^0) , которая расположена на кратчайшем расстоянии от точки (1,0) до области $\bar{\Omega}^+$. Точка (u_x^0, u_y^0) является граничной точкой для области $\bar{\Omega}^+$.

Вычислим интегралы (III.2.5) следующим образом. Перенесем начало координат в точку (1,0) и произведем поворот осей на угол ψ , где $\tan \psi = \gamma$, т.е. сделаем замену переменных интегрирования u_x, u_y на ξ, η по формулам

$$\begin{aligned} u_x &= 1 + \xi \cos \psi - \eta \sin \psi \\ u_y &= \xi \sin \psi + \eta \cos \psi \end{aligned} \quad (\text{III.2.6})$$

Тогда имеем

$$\alpha_{i0}^+ = \frac{h}{\pi} \iint_H \varphi_i(\xi, \eta) e^{-h(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta \cdot (1 - \tilde{R}) \quad (\text{III.2.7})$$

где

$$\tilde{R} = \frac{\iint_R \varphi_i e^{-h(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta}{\iint_H \varphi_i e^{-h(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta} \quad (\text{III.2.8})$$

Если мы покажем, что $\tilde{R} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$, то α_{i0}^+ можно представить в виде

$$\alpha_{i0}^+ \approx \frac{h}{\pi} \int_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\xi, \eta) e^{-h(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta \quad (\text{III.2.9})$$

причем $s = \sin \psi = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ (см. рис. 6).

Покажем, что $\tilde{R} \rightarrow 0$ когда $h \rightarrow \infty$ при вычислении α_{20}^+ . Следует заметить, что интегралы из соотношения (III.2.9) вычисляются точно. Вычисляя α_{20}^+ по (III.2.9), получим

$$\alpha_{20}^+ \approx \frac{\cos \psi}{2\sqrt{\pi h}} e^{-hs^2} \quad (\text{III.2.10})$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{h}{\pi} \iint_R u_y e^{-h[(u_x-1)^2 + u_y^2]} du_x du_y &\leq \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_y e^{-h[(u_x-1)^2 + u_y^2]} du_x du_y = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi h}} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{h}) \approx \frac{e^{-h}}{4\pi h} \end{aligned} \quad (\text{III.2.11})$$

Так что

$$\tilde{R} \leq \frac{e^{-h \frac{1}{1+\gamma^2}}}{2\sqrt{\pi h} \cos \psi}$$

Отсюда видно, что $\tilde{R} \rightarrow 0$, когда $h \rightarrow \infty$ при $0 \leq \gamma < \infty$.

Аналогично можно показать, что $\lim_{h \rightarrow \infty} \tilde{R} = 0$ при вычислении других α_{i0}^+ . Подставляя φ_i из (I.1.7) в (III.2.9) и вычисляя интегралы, получим выражения для α_{i0}^+ ($i = 0, 1, \dots, 6$). Выпишем эти формулы

$$\alpha_{00}^+ \approx \frac{1}{2} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{h} s) \quad s = \sin \psi = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

$$\alpha_{10}^+ \approx \alpha_{00}^+ - \alpha_0^+ s \quad \alpha_0^+ = \frac{e^{-hs^2}}{2\sqrt{\pi h}}$$

$$\alpha_{20}^+ \approx \alpha_0^+ \cos \psi$$

$$\alpha_{30}^+ = 0$$

(III.2.12)

$$\alpha_{40}^+ \approx \alpha_{10}^+ - s \alpha_{20}^+ \cos \psi + \frac{\alpha_{00}^+}{2h}$$

$$\alpha_{50}^+ \approx s \alpha_{20}^+ \cos \psi + \frac{\alpha_{00}^+}{2h}$$

$$\alpha_{60}^+ = \frac{\alpha_{00}^+}{2h}$$

Эти формулы верны для $0 \leq \gamma < \infty$. Из (III.2.12) видно, что все α_{i0}^+ могут быть выражены через α_{00}^+ и α_0^+ и что слагаемые в формулах для α_{i0}^+ играют не одинаковую роль. Так, например, первое слагаемое в формуле для α_{50}^+ является главным при $\sqrt{h} s \rightarrow \infty$ а второе слагаемое становится главным, когда $\sqrt{h} s \rightarrow 0$. Этот факт говорит о том, что мы имеем дело с неравномерным асимптотическим поведением α_{i0}^+ вблизи пластинки, как уже было отмечено в главе I § 2. Когда $\gamma \rightarrow 0$, формулы (III.2.12) переходят в формулы для α_{i0}^{+*} (III.2.1).

Найдем теперь выражения для γ_i^+ . По (III.1.16) и принимая во внимание (III.2.2) имеем

$$\gamma_i^+ = - \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \varphi_i e^{-h(\bar{u}-\bar{u}_0)^2} \exp \left\{ -|\bar{u}-\bar{u}_0| \frac{y}{u_y} \alpha_{00}^- \right\} d\bar{u} \quad (\text{III.2.13})$$

При оценке интегралов по u_z по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$, мы получим следующие соотношения

$$\chi_3^+ = 0 \quad \chi_6^+ \approx \frac{\chi_0^+}{2h}$$

$$\chi_i^+ = -\frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(u_x, u_y) e^{-h[(u_x-1)^2 + u_y^2]} \exp\left\{-\frac{y\alpha_{00}^-}{u_y} \sqrt{(u_x-1)^2 + u_y^2}\right\} du_x du_y \quad (\text{III.2.14})$$

$i = 0, 1, 2, 4, 5$

После замены переменных интегрирования u_x, u_y на ξ, η по формулам (III.2.6), для χ_i^+ получим (см. рис. 6)

$$\chi_i^+ = -\frac{h}{\pi} \int_{\frac{s-\eta}{\gamma}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\xi, \eta) e^{-h(\xi^2 + \eta^2)} \exp\left\{-y\alpha_{00}^- \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi}\right\} d\xi d\eta \quad (\text{III.2.15})$$

Отсюда видно, что точкой, в которой подынтегральная функция принимает максимальное значение, φ является точка $\xi_0 = 0, \eta_0 = s$. Поэтому подставляя в (III.2.15) φ_i по (I.1.7) и исследуя интегралы в окрестности точки (ξ_0, η_0) по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$, получим

$$\chi_i^+ \approx \alpha_{i0}^+ F(\bar{z}, h) \quad i = 0, 1, \dots, 6 \quad (\text{III.2.16})$$

где

$$F(\bar{z}, h) = -\exp\left\{-\frac{y\alpha_{00}^-}{\cos \varphi}\right\} = -\exp\left\{-y\alpha_{00}^- \sqrt{1 + \gamma^2}\right\} \quad (\text{III.2.17})$$

Когда $\gamma \rightarrow 0$, или $y \rightarrow 0$, формулы (III.2.16) переходят в выражения для $-\alpha_{i0}^{+*}$ (II.2.1). Принимая во внимание выражения для $\{M_i^{(1)}\}^\pm$ (III.1.1), обозначения (II.2.5) и формулы для $\alpha_{i0}^\pm$ (III.2.2), (III.2.12) и χ_i^+ (III.2.16), мы по (I.3.13)–(I.3.15) для макропараметров газа в первом приближении получим следующие асимптотические формулы

$$n^{(1)} \approx \alpha_{oo}^- + \alpha_{oo}^+ (1+F) + n_s$$

$$U_x^{(1)} \approx 1 + \frac{1}{n^{(1)}} \left\{ n_s (U_{sx} - 1) - \frac{\alpha_{oo}^+ \gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} (1+F) \right\}$$

$$U_y^{(1)} \approx \frac{1}{n^{(1)}} \left\{ \alpha_{oo}^- + \frac{\alpha_{oo}^+}{\sqrt{1+\gamma^2}} (1+F) + n_s U_{sy} \right\} \quad (\text{III.2.18})$$

$$T^{(1)} \approx \frac{2h}{3n^{(1)}} \left\{ \alpha_{oo}^- \left(1 + \frac{3}{2h}\right) + \gamma \alpha_{oo}^- + (1+F) \left[\alpha_{oo}^+ \left(1 + \frac{3}{2h}\right) - \frac{\alpha_{oo}^+ \gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \right] + n_s T_s - n^{(1)} U^{(1)2} \right\}$$

где $\alpha_{oo}^\pm$, $\alpha_o^\pm$, F вычисляются по формулам (III.2.2), (III.2.12) и (III.2.17). Окончательно параметры газа вычисляются по этим формулам, если найдены n_s , U_{sx} , U_{sy} , T_s .

§ 3. Асимптотическое поведение функций n_s , U_{sx} , U_{sy} , T_s при $h \rightarrow \infty$.

Исследуем теперь асимптотику n_s , U_{sx} , U_{sy} , T_s при $h \rightarrow \infty$, $y \gg 0$. По (II.2.5), (III.1.17) и (III.2.22) мы имеем для плотности потока частиц, рожденных на стенке, следующее выражение:

$$n_s = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{u_y}{\gamma}} \exp \left\{ -hu^2 - |\bar{u} - \bar{u}_o| \frac{y}{u_y} \alpha_{oo}^- \right\} d\bar{u} \quad (\text{III.3.1})$$

После оценки интегралов по u_x и u_z по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$ получим

$$n_s \approx \frac{1}{2} n_s^* + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -hu_y^2 - \frac{y}{u_y} \alpha_{oo}^- \sqrt{1+u_y^2} \right\} \operatorname{erf} \left(\sqrt{h} \frac{u_y}{\gamma} \right) du_y \quad (\text{III.3.2})$$

где заменяя переменную интегрирования на $t = \sqrt{h} u_y$, мы легко раскроем неравномерность асимптотики интеграла (III.3.2) при $y \rightarrow 0$.

Имеем

$$n_s \approx \frac{1}{2} (n_s^* + \tilde{n}_s) \quad (\text{III.3.3})$$

где

$$\tilde{n}_s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\gamma}\right) dt \quad (\text{III.3.4})$$

$$\alpha = \sqrt{h} y \alpha_{\infty} \quad (\text{III.3.5})$$

и n_s^* значение плотности отраженных частиц в случае бесконечной пластинки (II.3.4), но вместо α по (II.3.5) стоит выражение (III.3.5).

n_s является функцией двух параметров α и γ . Дальнейшее асимптотическое исследование проводится по параметру α , который при больших h может принимать любые неотрицательные значения. Асимптотика проводится при больших и малых α тем же путем как в главе II § 3.

При $\alpha \rightarrow \infty$ делается замена переменных $t = \alpha^{1/3} \xi$ и интеграл оценивается потом по методу Лапласа при $\alpha \rightarrow \infty$. Когда $\alpha \rightarrow 0$, для вычисления $\tilde{n}_s$ применяется преобразование Лапласа к интегралу (III.3.4). Если же $y = O(M^{-1})$, то $\tilde{n}_s$ надо вычислить численно. После асимптотического исследования интеграла (III.3.4) и принимая во внимание формулы для n_s^* (II.3.13), получим для n_s

$$n_s \approx \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-3(\frac{\alpha}{2})^{2/3}} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/3}\right] \right\} \left[1 + O(\alpha^{-2/3}) \right] & \alpha \rightarrow \infty \\ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\gamma} \right) + O(\alpha \ln \alpha) & \alpha \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{III.3.6})$$

Если в (III.3.6) $\gamma \rightarrow 0$, то эти формулы переходят в асимптотические выражения для n_s^* (П.3.13), полученные для случая бесконечной пластинки.

Если принять во внимание (П.2.5), (1.1.7), затем оценить в (III.1.17) интегралы по u_x и u_z по методу Лапласа и сделать потом замену переменных $t = \sqrt{h} u_y$, то для остальных макропараметров будем иметь:

$$n_s U_{sx} \approx n_s^* U_{sx}^* - \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi h} \sqrt{1+\gamma^2}} n_s^*(\beta) \quad (\text{III.3.7})$$

$$n_s U_{sy} \approx \frac{1}{2} (n_s^* U_{sy}^* + \tilde{n}_s \tilde{U}_{sy}) \quad (\text{III.3.8})$$

$$n_s T_s \approx \frac{1}{2} (n_s^* T_s^* + \tilde{n}_s \tilde{T}_s) - \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi h} \sqrt{1+\gamma^2}} n_s^*(\beta) U_{sy}^*(\beta) \quad (\text{III.3.9})$$

где

$$\tilde{n}_s \tilde{U}_{sy} = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \int_0^\infty t e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\gamma}\right) dt \quad (\text{III.3.10})$$

$$\tilde{n}_s \tilde{T}_s = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (1+t^2) e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\gamma}\right) dt \quad (\text{III.3.11})$$

$$n_s^*(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2 - \frac{\beta}{t}} dt \quad (\text{III.3.12})$$

$$n_s^*(\beta) U_{sy}^*(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \int_0^\infty t e^{-t^2 - \frac{\beta}{t}} dt \quad (\text{III.3.13})$$

$$\beta = \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{h} s \alpha_\infty, \quad s = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{III.3.14})$$

и n_s^* , $n_s^* U_{sx}^*$, $n_s^* U_{sy}^*$, $n_s^* T_s^*$ интегралы (П.3.4), (П.3.14) - (П.3.16), в которых вместо α из (П.3.5) надо писать α из (Ш.3.5).

Из (Ш.3.7) и (Ш.3.9) видно, что $n_s U_{sx}$ и $n_s T_s$ зависят от трех параметров α , γ и β . Причем β по (Ш.3.14) является комбинацией α и γ . Ввиду неравномерности асимптотики при $\gamma \rightarrow 0$ и $s \rightarrow 0$, все возникающие интегралы можно как в главе II § 3 асимптотически исследовать для больших и малых α и β . При этом ввиду (Ш.3.5) и (Ш.3.14) будем иметь три области асимптотики; а именно области, в которых во-первых $\alpha \rightarrow \infty$ и $\beta \rightarrow \infty$, во-вторых, $\alpha \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \infty$ и в третьих $\alpha \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow 0$.

Последняя область означает окрестность носка пластинки. В ней функции от β дают вклад в главный член асимптотики. Во второй области, т.е. в пограничном слое, под которым понимаем бесконечный тонкий слой, который исчезает вместе с характеризующим его параметром α , функции от β исчезают, так как они стремятся экспоненциально к нулю при $\beta \rightarrow \infty$, остаются функции от α . В первой области функции от α и выражения, зависящие от β имеют одинаковый порядок.

Оценивая (Ш.3.7)-(Ш.3.9) по методам, изложенным в главе II § 3, получим

$$n_s U_{sx} \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}h} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}} \left[1 + O(\alpha^{-2/3})\right] - \frac{\gamma}{2\sqrt{3}\pi h \sqrt{1+\gamma^2}} e^{-3\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2/3}} \left[1 + O(\beta^{-2/3})\right] & \alpha \rightarrow \infty \\ & \beta \rightarrow \infty \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}h} \alpha \left\{ \ln \alpha + \frac{3}{2}C + O(\alpha) \right\} & \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}h} \alpha \left\{ \ln \alpha + \frac{3}{2}C + O(\alpha) \right\} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi}h \sqrt{1+\gamma^2}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta \ln \beta + O(\beta) \right\} & \alpha \rightarrow 0 \\ & \beta \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{Ш.3.15})$$

$$n_s U_{sy} \approx \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}h} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/3} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/3} \right] \right\} \left[1 + O(\alpha^{-2/3}) \right] & \alpha \rightarrow \infty \\ \frac{1}{4\sqrt{\pi}h} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} - \alpha\sqrt{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \right) + O(\alpha^2 \ln \alpha) \right\} & \alpha \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{III.3.16})$$

$$n_s T_s \approx \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}h} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3} \right] e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/3} \right] \right\} \left[1 + O(\alpha^{-2/3}) \right] - \\ - \frac{\gamma \left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}}{2\sqrt{3}\pi h (1+\gamma^2)} e^{-3\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2/3}} \left[1 + O(\beta^{-2/3}) \right] & \alpha \rightarrow \infty, \beta \rightarrow \infty \\ \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \gamma - \frac{\gamma}{1+\gamma^2} \right) \right] + O(\alpha \ln \alpha) \right\} & \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty \\ \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \gamma - \frac{\gamma}{1+\gamma^2} \right) \right] + O(\alpha \ln \alpha) \right\} - \\ - \frac{1}{2\pi h} \frac{\gamma}{1+\gamma^2} \left\{ 1 - \sqrt{\pi} \beta - \beta^2 \ln \beta + O(\beta^2) \right\} & \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{III.3.17})$$

Когда рассматриваются параметры газа в точках далеко от носка пластинки, т.е. если $\gamma \rightarrow 0$, то формулы (III.3.15)-(III.3.17) переходят в асимптотические выражения (II.3.17)-(II.3.19), полученные для бесконечной пластинки. Вблизи носка пластинки макропараметры газа существенно зависят от γ . Подставляя (III.3.6), (III.3.15)-(III.3.17) в (III.2.18) окончательно получим выражения для макропараметров газа в первом приближении.

§ 4 Расчёт примеров и результаты

В приложении II помещены графики поведения безразмерных величин плотности $n^{(1)}$, средней скорости $\bar{U}^{(1)}$ и температуры $T^{(1)}$ газа в зависимости от расстояния y от поверхности пластинки при $M = 22$ и разных значениях расстояния x от передней кромки пластинки. Расчёт проводился при $x = 10^{-2}; 0,5; 2; 10^2; 10^3$ следующим образом: фиксировались $h = \frac{5}{6} M^2$ и x . По ним вычислялись для разных y величины $\gamma = \frac{y}{x}$ и α / Ш.3.5 /. Далее определили $n^{(1)}$, $\bar{U}^{(1)}$, $T^{(1)}$ по / Ш.2.18 / , причём, когда $0 \leq \alpha \leq 8 \cdot 10^{-2}$ мы пользовались формулами для n_s , $n_s U_{sx}$, $n_s U_{sy}$, $n_s T_s$ при $\alpha \rightarrow 0$, а когда $3 \leq \alpha \leq \infty$ мы взяли те же формулы для $\alpha \rightarrow \infty$. При $\alpha = O(1)$, n_s , $n_s U_{sx}$, $n_s U_{sy}$, $n_s T_s$ были вычислены по / Ш.3.3 / , / Ш.3.7 / - / Ш.3.9 / численно по методу Гаусса, аналогично главе II.

Из формул / Ш.2.18 / и поведения кривых можно сделать следующие выводы: Во всех сечениях x макропараметры газа $n^{(1)}$, $\bar{U}^{(1)}$, $T^{(1)}$ переходят при $y \rightarrow \infty$ в значения для макропараметров газа в невозмущенном набегающем потоке / нулевое приближение/, причем этот процесс при малых x осуществляется быстрее, чем при больших x . Вблизи стенки $n^{(1)}$, $U_x^{(1)}$, $U_y^{(1)}$, $T^{(1)}$ претерпевают резкие изменения, которые тем резче, чем меньше x .

При уменьшении x кривые для $U_x^{(1)}$ и $T^{(1)}$ вблизи $y = 0$ больше и больше прижимаются к оси ординат и когда $M \rightarrow \infty$ мы имеем разрыв в составляющей скорости $U_x^{(1)}$ и температуре $T^{(1)}$. При $y \rightarrow 0$ $U_x^{(1)} \rightarrow \frac{1}{2}$, а $T^{(1)} \rightarrow h$.

При малых x , т.е. вблизи носка пластинки, $n^{(1)}$ и $U_y^{(1)}$ при увеличении y сначала резко возрастают до максимального зна-

чения, а потом убывает и стремится к единице или нулю при $y \rightarrow \infty$. Это значит, что $n^{(1)}$ и $U_y^{(1)}$ вблизи носка пластинки существенно зависят от $\chi = \frac{y}{x}$. Для точек далеко от носка пластинки / большие x / $n^{(1)}$ и $U_y^{(1)}$ ведут себя как в случае с бесконечной пластинкой / глава II /, т.е. при увеличении y сначала резко убывают до минимального значения, а потом возрастают и стремятся к значениям в невозмущенном потоке при $y \rightarrow \infty$. Область максимума $n^{(1)}$ и $U_y^{(1)}$ / при малых x / и область минимума $n^{(1)}$ и $U_y^{(1)}$ / при больших x / является область, в которой $\alpha = O(1)$. На стенке $n^{(1)} = 1$ и $U_y^{(1)} = 0$. Разрыв в составляющей скорости $U_y^{(1)}$ при $M \rightarrow \infty$ не наблюдается. Интересно еще отметить, что $U_y^{(1)}$ положительна при малых x и отрицательна при больших x . Существуют и сечения x , в которых $U_y^{(1)}$ как положительна так и отрицательна.

ГЛАВА IV .

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОТОКОВ МАССЫ, ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ.

§ 1. Функция распределения $f^{(2)}(\bar{z}_s, \bar{u})$.

Рассмотрим, как и в главе III, гиперзвуковое продольное обтекание пластинки $y = 0$, $x \geq 0$ (рис.4) одноатомным разреженным газом, средняя скорость которого равна $\bar{U}_0 = \{1, 0, 0\}$. Требуется найти асимптотику функций

$$N(\bar{z}_s) = - \iiint_{u_y < 0} f(\bar{z}_s, \bar{u}) u_y d\bar{u} \quad (IV.1.1)$$

$$p_x(\bar{z}_s) = p_x^- - p_x^+ \quad (IV.1.2)$$

$$E(\bar{z}_s) = E^- - E^+ \quad (IV.1.3)$$

где

$$p_x^+ = 2 \iiint_{u_y > 0} \tilde{\Phi}(\bar{z}_s, \bar{u}) u_x d\bar{u} \quad (IV.1.4)$$

$$E^+ = \iiint_{u_y > 0} \tilde{\Phi}(\bar{z}_s, \bar{u}) u^2 d\bar{u} \quad (IV.1.5)$$

$$p_x^- = -2 \iiint_{u_y < 0} f(\bar{z}_s, \bar{u}) u_x u_y d\bar{u} \quad (IV.1.6)$$

где

$$K_0^{(1)} = K_1^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \quad K_2^{(1)} = K_0^{(1)} \left(1 + \frac{2}{h}\right)$$

Отсюда видно, что в первом приближении еще ничего нельзя сказать о зависимости K_i от расстояния x от носка пластины. Чтобы найти эту зависимость, рассмотрим второе приближение для $f(\bar{z}_s, \bar{u})$. По (I.1.1) имеем

$$f^{(2)}(\bar{z}_s, \bar{u}) = \int_0^\infty \Phi^{(1)}(\bar{z}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) \Pi^{(1)}(\bar{z}_s, \bar{u}, \tau) d\tau \quad (IV.1.14)$$

Дальше можно было бы искать $\Phi^{(1)}$ и $\Pi^{(1)}$ по (I.4.4), (I.4.7), (I.4.12), (I.4.15) через коэффициенты $Q_m^{(1)\pm}$, но этот путь ведет к слишком громоздким расчетам. Поэтому мы сделаем здесь еще одно упрощающее предположение. В дальнейших рассуждениях воспользуемся хорошо известным из литературы [2], [16], [40], [41], так называемым τ - приближением, т.е. положим

$$\Phi^{(1)}(\bar{z}, \bar{u}) = f_0^{(1)}(\bar{z}, \bar{u}) Q_0^{(1)}(\bar{z}, \bar{u}) \quad (IV.1.15)$$

где $f_0^{(1)}$ - локальное максвелловское распределение

$$f_0^{(1)}(\bar{z}, \bar{u}) = n^{(1)}(\bar{z}) \left[\frac{h^{(1)}(\bar{z})}{\pi} \right]^{3/2} \exp \left\{ -h^{(1)}(\bar{z}) [\bar{u} - \bar{U}^{(1)}(\bar{z})]^2 \right\} \quad (IV.1.16)$$

причем $n^{(1)}$ - численная плотность, $\bar{U}^{(1)}$ - средняя скорость, $T^{(1)} = \frac{h}{h^{(1)}}$ - температура ($h = \frac{5}{6} M^2$), которые вычисляются по (II.2.18) и $Q_0^{(1)}$ - функция столкновений, которая выражается таким образом [2]

$$Q_0^{(1)}(\bar{z}, \bar{u}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} |\bar{u} - \bar{u}_1| f_0^{(1)}(\bar{z}, \bar{u}_1) d\bar{u}_1 \quad (IV.1.17)$$

Принимая во внимание (IV.1.16), из (IV.1.17) получим [2]

$$Q_0^{(1)}(\bar{z}, \bar{u}) = \frac{h^{(1)}}{\sqrt{\pi h^{(1)}}} \left\{ e^{-h^{(1)} v^2} + \frac{1}{2v} \sqrt{\frac{\pi}{h^{(1)}}} (1 + 2h^{(1)} v^2) \operatorname{erf}(v\sqrt{h^{(1)}}) \right\} \quad (\text{IV.1.18})$$

где $v = |\bar{u} - \bar{U}^{(1)}|$

Оставляя в асимптотических формулах для $\bar{U}^{(1)}$ и $T^{(1)}$ из (III.2.18) только главный член асимптотики при $h \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\bar{U}^{(1)} \approx \left\{ 1 - \frac{n_s}{h^{(1)}}, 0, 0 \right\} \quad (\text{IV.1.19})$$

$$h^{(1)} = \frac{h}{T^{(1)}} \approx \frac{3n^{(1)2}}{2(n^{(1)} - n_s)(\frac{3}{2}h^{(1)} + n_s)} \quad (\text{IV.1.20})$$

где $h^{(1)}$, n_s найдутся по (III.2.18) и (III.3.6). Отсюда видно, что $f_0^{(1)}(\bar{z}, \bar{u})$ и $Q_0^{(1)}(\bar{z}, \bar{u})$ выражаются только через $h^{(1)}$ и n_s .

Принимая во внимание (I.4.4) и (IV.1.15), (IV.1.14) может быть записано в виде

$$f^{(2)}(\bar{z}, \bar{u}) = \int_0^\infty f_0^{(1)}(\bar{z}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) Q_0^{(1)}(\bar{z}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) \exp \left\{ - \int_0^\tau Q_0^{(1)}(\bar{z}_s - q \bar{u}, \bar{u}) dq \right\} d\tau \quad (\text{IV.1.21})$$

где $f_0^{(1)}$ и $Q_0^{(1)}$ выражаются по (IV.1.16) и (IV.1.18).

Подставляя (IV.1.21) в (IV.1.12), мы можем вычислить K_i во втором приближении.

§ 2. Выражения для $K_i^{(2)}$ ($i=0,1,2$).

По (IV.1.12) имеем

$$K_i^{(2)} = - \iiint_{u_y < 0} f^{(2)}(\bar{z}_s, \bar{u}) u_y w_i d\bar{u} \quad i=0,1,2 \quad (\text{IV.2.1})$$

где w_i и $f^{(2)}(\bar{z}_s, \bar{u})$ вычисляются по (IV.1.11) и (IV.1.21).

После замены $u_y = -u_y$ интеграл (IV.2.1) перепишется в виде

$$K_i^{(2)} = \iiint_{u_y > 0} f^{(2)}(\bar{z}_s, \bar{u}) \Big|_{u_y = -u_y} \cdot w_i u_y d\bar{u} \quad i = 0, 1, 2 \quad (IV.2.2)$$

Подинтегральная функция в (IV.1.21) зависит от $f_0^{(1)}$ и $Q_0^{(1)}$, которые в свою очередь по (IV.1.16) и (IV.1.18) выражаются ввиду (IV.1.19) и (IV.1.20) через $n^{(1)}(\bar{z}_s - \tau \bar{u})$ и $n_s(\bar{z}_s - \tau \bar{u})$. Из (III.2.18) и (III.3.6) следует

$$n^{(1)}(\bar{z}_s - \tau \bar{u}) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \sqrt{h} \frac{\tau u_y}{x - \tau u_x} \right) + n_s(\bar{z}_s - \tau \bar{u}) + \\ + \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{h} \frac{\tau u_y}{x - \tau u_x} \right) \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tau u_y \sqrt{1 + \left(\frac{\tau u_y}{x - \tau u_x} \right)^2} \left(1 + \right. \right. \right. \quad (IV.2.3) \\ \left. \left. \left. + \operatorname{erf} \sqrt{h} \frac{\tau u_y}{x - \tau u_x} \right) \right\} \right]$$

$$n_s(\bar{z}_s - \tau \bar{u}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-3\left(\frac{\alpha^*}{2}\right)^{2/3}} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{x - \tau u_x}{\tau u_y} \left(\frac{\alpha^*}{2} \right)^{1/3} \right] \right\} \left[1 + O(\alpha^{*-2/3}) \right] & \alpha^* \rightarrow \infty \\ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - \tau u_x}{\tau u_y} \right) + O(\alpha^* \ln \alpha^*) & \alpha^* \rightarrow 0 \end{cases} \quad (IV.2.4)$$

где по (III.3.5)

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{h}}{2} \tau u_y \left(1 + \operatorname{erf} \sqrt{h} \frac{\tau u_y}{x - \tau u_x} \right) \quad (IV.2.5)$$

Как видно из (IV.2.2) и (IV.1.21) для определения $K_i^{(2)}$ надо

$$f_0^{(1)} = f_0^{(0)} = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h v_0^2} \quad (\text{IV.2.6})$$

$$Q_0^{(1)} = Q_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \left\{ e^{-h v_0^2} + \frac{1}{2 v_0} \sqrt{\frac{\pi}{h}} (1 + 2 h v_0^2) \operatorname{erf}(v_0 \sqrt{h}) \right\} \approx v_0$$

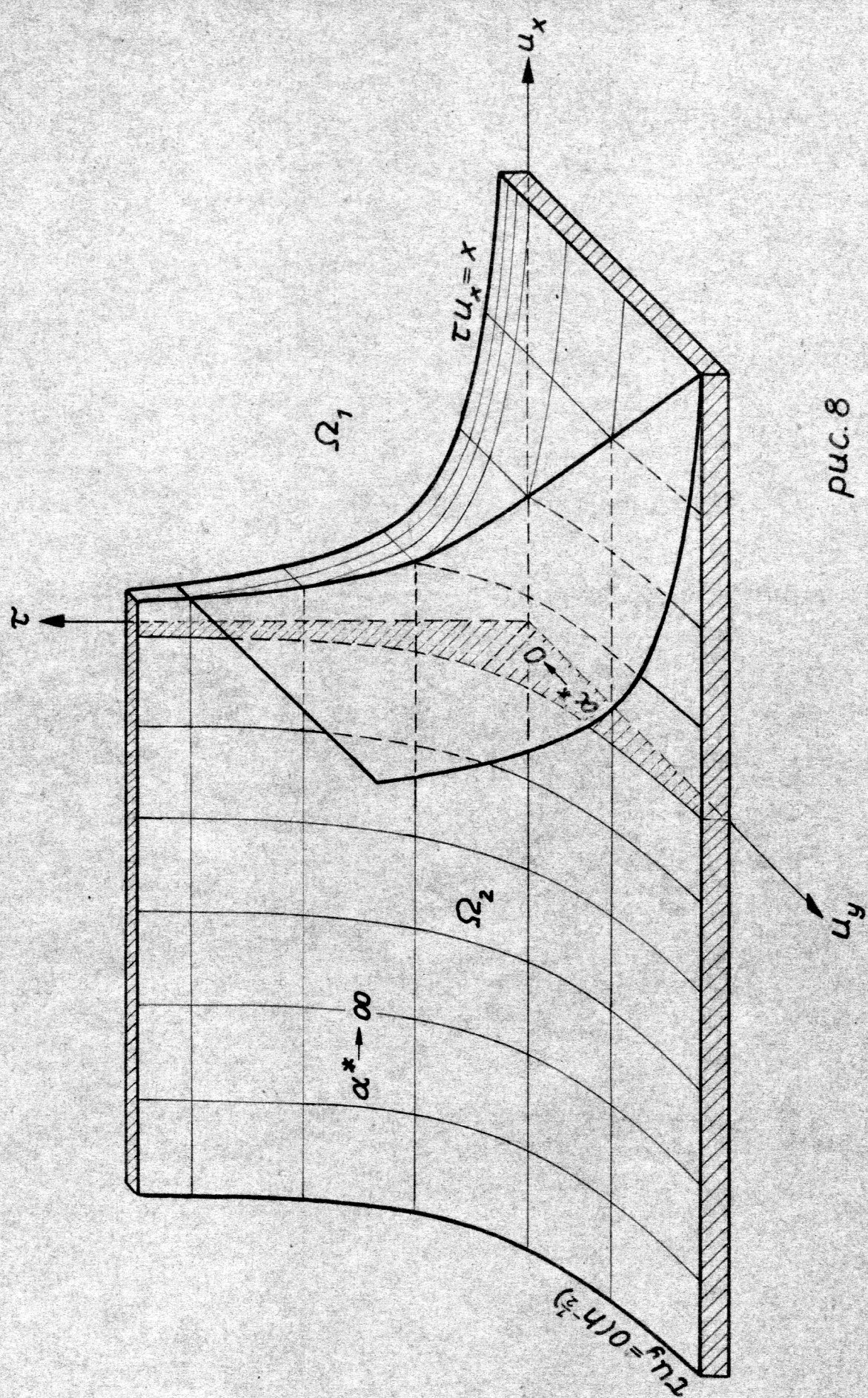
где $v_0 = |\bar{u} - \bar{U}_0|$.

Но в точках, для которых $x - \tau u_x \geq 0$, $f_0^{(1)}$ и $Q_0^{(1)}$ вычисляются по (IV.1.16) и (IV.1.18). Таким образом, одна поверхность Стокса будет $\tau u_x = x$, которая является гиперболическим цилиндром с осью Ou_y (рис.8).

При $x - \tau u_x \geq 0$, выражение в скобках в (IV.2.5) имеет порядок единицы для всех $\bar{u}$ и τ из области интегрирования в (IV.2.2). Поэтому ввиду (IV.2.4) и (IV.2.5) второй поверхностью Стокса является гиперболический цилиндр $\tau u_y = h^{-1/2}$ с осью Ou_x (рис.8). Поверхность $\tau u_x = x$ делит область интегрирования в пространстве τ, u_x, u_y на две части Ω_1 и Ω_2 , в которых $x - \tau u_x < 0$ и $x - \tau u_x \geq 0$. Поверхность Стокса $\tau u_y = h^{-1/2}$ делит в свою очередь Ω_2 на две подобласти, в одной из которых $\alpha^* \rightarrow 0$, а в другой $\alpha^* \rightarrow \infty$.

Как видно из рис.7 и 8, можно сделать следующие выводы относительно определения $K_i^{(2)}$:

- 1) Собирая молекулы по лучам 1, мы должны интегрировать по всем скоростям u_z и по области Ω_1 в пространстве τ, u_x, u_y .
- 2) Собирая молекулы по отрезкам лучей 2, мы должны интегрировать по всем u_z и в пространстве τ, u_x, u_y по части области Ω_2 , в которой $\alpha^* \rightarrow \infty$.



3) Собирая молекулы по отрезкам 3 в пограничном слое мы будем интегрировать по всем u_z и в пространстве τ, u_x, u_y по части области Ω_2 , в которой $\alpha^* \rightarrow 0$.

4) В окрестности поверхности Стокса $\tau u_y = h^{-1/2}$, т.е. при $\alpha^* = O(1)$, мы при оценке интеграла $K_i^{(2)}$ ограничимся только его порядком по h .

Таким образом, принимая во внимание поверхность Стокса $\tau u_x = x$, интегралы (IV.2.2) можно переписать в виде

$$K_i^{(2)} = K_{i1}^{(2)} + K_{i2}^{(2)} \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{IV.2.7})$$

где

$$K_{i1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{\Omega_1} u_y F_i du_x du_y d\tau du_z \quad (\text{IV.2.8})$$

$$K_{i2}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{\Omega_2} u_y F_i du_x du_y d\tau du_z \quad (\text{IV.2.9})$$

и

$$F_i = f_0^{(1)}(\bar{z}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) Q_0^{(1)}(\bar{z}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) \exp \left\{ - \int_0^{\tau} Q_0^{(1)}(\bar{z}_s - q \bar{u}, \bar{u}) dq \right\} \cdot w_i \Big|_{u_y = -u_y} \quad (\text{IV.2.10})$$

Ввиду (IV.2.6) и рис.8, для $K_{i1}^{(2)}$ имеем

$$K_{i1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_x \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{x}{u_x}}^{\infty} d\tau \cdot u_y v_0 f_0^{(1)} e^{-v_0 \tau} w_i \quad (\text{IV.2.11})$$

Здесь и в дальнейшем будем писать после символа интеграла дифференциал переменной, по которой интегрируется.

Интегрируя в выражении (IV.2.11) по τ , получим

$$K_{i1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_x \int_0^{\infty} du_y \cdot u_y f_0^{(0)} w_i e^{-V_0 \frac{x}{u_x}} \quad (IV.2.12)$$

Оценивая в (IV.2.12) интегралы по u_x и u_z по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$, получим

$$K_{i1}^{(2)} \approx \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{w}_i u_y e^{-h u_y^2 - x u_y} du_y \quad i=0,1,2 \quad (IV.2.13)$$

где

$$\tilde{w}_0 = \tilde{w}_1 = 1 \quad \tilde{w}_2 = 1 + \frac{1}{h} + u_y^2 \quad (IV.2.14)$$

Интегралы вида (IV.2.13) берутся. В результате будем иметь

$$K_{01}^{(2)} \approx K_{11}^{(2)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \left\{ 1 - x\sqrt{\pi} e^{x^2} [1 - \operatorname{erf} x] \right\} \quad (IV.2.15)$$

$$K_{21}^{(2)} \approx \left[1 + \frac{1}{h} \left(\frac{5}{2} + x^2 \right) \right] K_{01}^{(2)} - \frac{1}{4\sqrt{\pi h} h} \quad (IV.2.16)$$

где $x = \frac{x}{2\sqrt{h}}$.

Далее, принимая во внимание (IV.2.9) и рис.8, $K_{i2}^{(2)}$ можно записать в виде

$$K_{i2}^{(2)} = K_{i2_1}^{(2)} + K_{i2_2}^{(2)} + K_{i2_3}^{(2)} \quad (IV.2.17)$$

где

$$K_{i2_1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_0^{\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{h} u_y}} d\tau \int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x \cdot u_y F_i \quad (IV.2.18)$$

$$K_{i2_2}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{h}u_y}}^{\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{h}u_y}} d\tau \int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x \cdot u_y F_i \quad (\text{IV.2.19})$$

$$K_{i2_3}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{h}u_y}}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x \cdot u_y F_i \quad (\text{IV.2.20})$$

Интеграл (IV.2.19) выделяет окрестность поверхности Стокса $\tau u_y = h^{-1/2}$, в которой $\alpha^* = O(1)$. Вообще говоря ε должна быть функцией от h , которая стремится к нулю при $h \rightarrow \infty$. Проведенные в главах II и III расчеты макропараметров газа показывают, что при возрастании h область численного интегрирования (где $\alpha^* = O(1)$) так сильно сужается, что практически асимптотическими формулами можно пользоваться вплоть до поверхности Стокса. Это подсказывает, что (IV.2.19) не должен давать вклад в главный член асимптотики $K_{i2}^{(2)}$. Ввиду непрерывности $h^{(1)}$ и h_s (глава III) подинтегральная функция в (IV.2.19) также непрерывна. Поэтому, переходя в (IV.2.19) от интегрирования по τ к интегрированию по $y_1 = \tau u_y$ и оценивая потом интеграл по y_1 по теореме о среднем значении, получим следующую оценку

$$K_{i2_2}^{(2)} \approx O(\varepsilon h^{-1/2}) \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{IV.2.21})$$

Функцию $\varepsilon(h)$ можно было бы уточнить, вычисляя $h^{(1)}$ (которая входит в (IV.2.19) в виде интеграла) для разных значений h , и определяя потом степень сужения области численного интегрирования в зависимости от h . Но мы здесь ограничимся только оценкой (IV.2.21).

Чтобы найти для $K_{i2}^{(2)}$ главный член асимптотики, надо еще оценить интегралы (IV.2.18) и (IV.2.20).

§ 3. Оценка интегралов $K_{i2_3}^{(2)}$.

По (IV.2.20) имеем

$$K_{i2_3}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{h}u_y}}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x \cdot u_y F_i \quad i=0,1,2 \quad (\text{IV.3.1})$$

Здесь интегрирование производится по области в пространстве τ, u_x, u_y , в которой $\alpha^* \rightarrow \infty$. Принимая во внимание (IV.2.10), (IV.1.16), (IV.1.18) и оставляя в (IV.1.19), (IV.1.20), (IV.2.3) и (IV.2.4) только главные члены асимптотики при $\alpha^* \rightarrow \infty$, интегралы (IV.3.1) можно переписать в виде:

$$K_{i2_3}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{h}u_y}}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x \cdot u_y v_0 f_0^{(0)} e^{-v_0 \tau} w_i \quad (\text{IV.3.2})$$

где $v_0, f_0^{(0)}$ и w_i : величины из (IV.2.6) и (IV.1.11). Оценивая в (IV.3.2) интегралы по u_z по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$, получим

$$K_{i2_3}^{(2)} \approx \frac{h}{\pi} \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{h}u_y}}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x \cdot u_y w_i^* \sqrt{(u_x-1)^2 + u_y^2} e^{-h[(u_x-1)^2 + u_y^2] - \tau \sqrt{(u_x-1)^2 + u_y^2}} \quad (\text{IV.3.3})$$

где

$$w_0^* = 1 \quad w_1^* = u_x \quad w_2^* = u_x^2 + u_y^2 + \frac{1}{2h} \quad (\text{IV.3.4})$$

Интеграл по u_x можно разбить на две части, а именно

$$\int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x = \int_{-\infty}^0 du_x + \int_0^{\frac{x}{\tau}} du_x \quad (\text{IV.3.5})$$

Как видно из (IV.3.3), при интегрировании по u_x точка максимума подынтегральной функции лежит в точке $u_x = 1$. Так как эта точка лежит вне области интегрирования первого интеграла в правой части (IV.3.5), то он имеет порядок $e^{-O(h)}$ [44]. Следовательно при вычислении $K_{i2_3}^{(2)}$ главную роль играет $\int_0^{\frac{x}{u_x}} du_x$. Это ясно и из физических соображений (рис.7), т.е. интегрирование по отрезкам луча 2, для которых $u_x < 0$, не должно давать вклад в главный член асимптотики, так как по этим лучам в точку X собирается меньше частиц, чем по лучам, для которых $u_x > 0$. Принимая во внимание рис.8, выражение для $K_{i2_3}^{(2)}$ перепишем в виде

$$K_{i2_3}^{(2)} \approx \frac{h}{\pi} \int_0^{\frac{x}{u_x}} du_x \int_0^{\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{h}\tau}} d\tau \int_{\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{h}\tau}}^{\infty} du_y \cdot u_y W_i^* \sqrt{(u_x-1)^2 + u_y^2} e^{-h[(u_x-1)^2 + u_y^2] - \tau \sqrt{(u_x-1)^2 + u_y^2}} + o(e^{-h}) \quad (IV.3.6)$$

Оценивая здесь интеграл по u_x в окрестности точки $u_x = 1$ по методу Лапласа при $h \rightarrow \infty$ и переходя от переменной интегрирования u_y к $z = h^{1/2}(1+\varepsilon)^{-1}\tau u_y$, получим

$$K_{i2_3}^{(2)} \approx \frac{(1+\varepsilon)^3}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{u_x}} \int_0^{\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{h}\tau}} \tilde{W}_i z^2 e^{-h^{1/2}(1+\varepsilon)z - (1+\varepsilon)^2 \frac{z^2}{\tau^2}} \frac{d\tau}{\tau^3} dz \quad i=0,1,2 \quad (IV.3.7)$$

где $\tilde{W}_i$ - величины из (IV.2.14).

После замены переменных $\frac{1}{\tau} = t$ эти двойные интегралы вычисляются, и в результате будем иметь

$$K_{02_3}^{(2)} = K_{12_3}^{(2)} \approx \frac{x}{2\sqrt{h}} e^{x^2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{1}{x} + x \right] \right\} \quad (IV.3.8)$$

$$K_{22_3}^{(2)} \approx \left(1 + \frac{5}{2h} \right) K_{02_3}^{(2)} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}h^2} e^{-\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} \quad (IV.3.9)$$

где $\mathcal{X} = \frac{x}{2\sqrt{h}}$.

Чтобы получить окончательные асимптотические формулы для $K_i^{(2)}$, осталось еще исследовать интегралы $K_{i2_1}^{(2)}$.

§ 4. Асимптотика интегралов $K_{i2_1}^{(2)}$.

По (IV.2.18) имеем

$$K_{i2_1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_0^{\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{h}u_y}} d\tau \int_{-\infty}^{\frac{x}{\tau}} du_x \cdot u_y F_i \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{IV.4.1})$$

где из (IV.2.10) и (IV.1.11)

$$F_i = \Phi^{(i)}(\bar{z}_s - \tau \bar{u}, \bar{u}) \exp \left\{ - \int_0^{\tau} Q_0^{(i)}(\bar{z}_s - q \bar{u}, \bar{u}) dq \right\} \cdot W_i \Big|_{u_y = -u_y} \quad (\text{IV.4.2})$$

$$W_0 = 1 \quad W_1 = u_x \quad W_2 = u^2 \quad (\text{IV.4.3})$$

В этом интеграле интегрирование производится по всем u_z и в пространстве τ, u_x, u_y по части области Ω_2 , в которой $\alpha^* \rightarrow 0$. Переходя в (IV.4.1) от интегрирования по τ к интегрированию по $y_1 = \tau u_y$ и оценивая потом интеграл по y_1 по теореме о среднем значении, получим

$$K_{i2_1}^{(2)} \approx \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{-\infty}^{\lambda u_y} du_x \Phi^{(i)}\left(\bar{z}_s - \frac{y_0}{u_y} \bar{u}, \bar{u}\right) e^{-\int_0^{\frac{y_0}{u_y}} Q_0^{(i)}(\bar{z}_s - q \bar{u}, \bar{u}) dq} \cdot W_i + o(\varepsilon h^{-1/2}) \quad (\text{IV.4.4})$$

где $\lambda = \frac{x}{y_0}$ и $0 < y_0 < h^{-1/2}$.

Выражение (IV.4.4) можно переписать в виде

$$K_{iz_1}^{(2)} \approx \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \left\{ \int_0^{\tilde{y}_0} + \int_{\tilde{y}_0}^{\infty} \right\} du_y \int_{-\infty}^{\lambda u_y} du_x w_i \Phi^{(1)} e^{-\int_{\tilde{y}_0}^{\frac{y_0}{u_y}} Q_0^{(1)} dq} + O(\varepsilon h^{-1/2}) \quad (1Y.4.5)$$

где $\tilde{y}_0 = O(y_0^\delta)$ и $0 < \delta < 1$.

Оценивая $\int_0^{\tilde{y}_0} du_y$ по теореме о среднем значении, получим в (1Y.4.5) слагаемое $O(\tilde{y}_0 h^{-1/2})$. Оставшийся интеграл имеет порядок $h^{-1/2}$. Поэтому окрестность малых u_y не дает вклад в главный член асимптотики $K_{iz_1}^{(2)}$. Следовательно, так как при $u_y \geq \tilde{y}_0$ верхний предел интеграла по q стремится к нулю при $h \rightarrow \infty$, выражение (1Y.4.5) может быть записано в виде

$$K_{iz_1}^{(2)} \approx \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{-\infty}^{\lambda u_y} du_x \Phi^{(1)} \left(\bar{z}_s - \frac{y_0}{u_y} \bar{u}, \bar{u} \right) w_i + O(\tilde{y}_0 h^{-1/2}) \quad (1Y.4.6)$$

Это значит, что дальнейшие исследования проводим в рамках теории однократных столкновений, так как в нашем случае вероятность свободного пробега равна единице. Как уже было отмечено в § 2, $\Phi^{(1)}$ выражается через $n^{(1)}$ и n_s . Эти величины после оценки в (1Y.4.1) интеграла по τ и ввиду (1Y.2.3) и (1Y.2.4) примут вид

$$n^{(1)} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{\sqrt{h}}{\beta^*} \right) + n_s + \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{1+\beta^{*2}}} \right) \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} y_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^{*2}}} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{\sqrt{h}}{\beta^*} \right) \right\} \right] \quad (1Y.4.7)$$

$$n_s \approx \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \beta^* \right) \quad (1Y.4.8)$$

где

$$\beta^* = \frac{x - \frac{y_0}{u_y} u_x}{y_0} \quad (1У.4.9)$$

Здесь β^* - котангенс угла между пластинкой и прямой, проходящей через переднюю кромку пластинки и точки в пограничном слое, расположенные на расстоянии y_0 от пластинки. Для существенного упрощения дальнейших вычислений выпишем для $n^{(1)}$ и n_s только главные члены асимптотики при $\beta^* \rightarrow 0$ и $\beta^* \rightarrow \infty$. Из (1У.4.7) и (1У.4.8) следует

$$n_s \approx \begin{cases} \frac{1}{4} & \beta^* \rightarrow 0 \\ \frac{1}{2} & \beta^* \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1У.4.10)$$

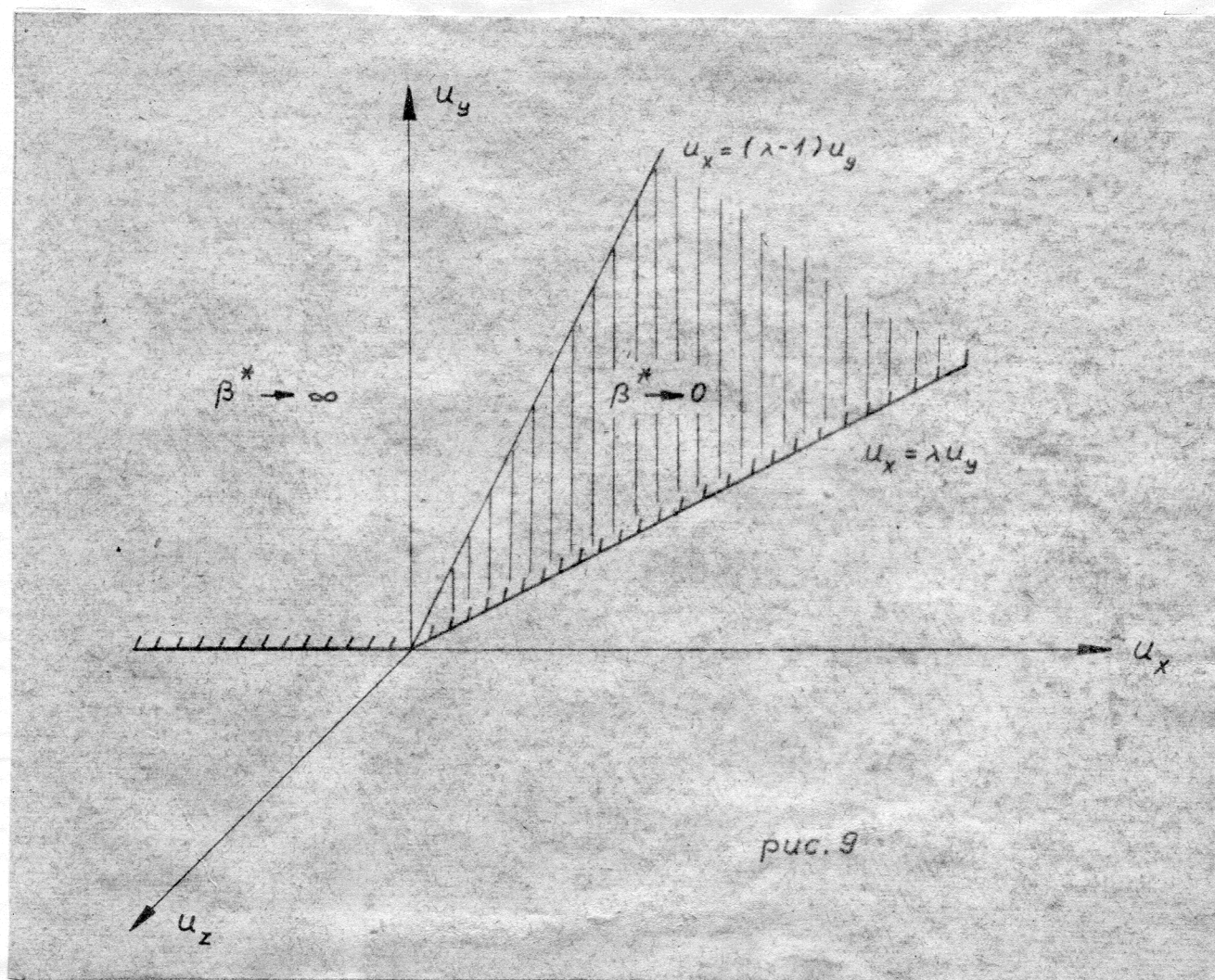
$$n^{(1)} \approx \begin{cases} n_1^{(1)} = 1 & \beta^* \rightarrow \infty \\ n_2^{(1)} = \frac{5}{4} & \beta^* \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1У.4.11)$$

Принимая во внимание (1У.1.19), (1У.1.20), (1У.4.10) и (1У.4.11) мы можем выписать главные члены асимптотики $\bar{U}^{(1)}$ и $h^{(1)}$, а именно

$$\bar{U}^{(1)} \approx \begin{cases} \bar{U}_1^{(1)} = \left\{ \frac{1}{2}, 0, 0 \right\} & \beta^* \rightarrow \infty \\ \bar{U}_2^{(1)} = \left\{ \frac{4}{5}, 0, 0 \right\} & \beta^* \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1У.4.12)$$

$$h^{(1)} \approx \begin{cases} h_1^{(1)} = 6 & \beta^* \rightarrow \infty \\ h_2^{(1)} = \frac{75}{8} & \beta^* \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1У.4.13)$$

Поведение подинтегральной функции в (1У.4.6) различно при $\beta^* \rightarrow 0$ и $\beta^* \rightarrow \infty$. Этот факт приводит к разбиению области интегрирования в (1У.4.6) на две подобласти. Из (1У.4.9) следует, что $\beta^* = O(1)$, когда $x - \frac{y_0}{u_y} u_x = O(y_0)$. Отсюда вытекает, что поверхностью Стокса в пространстве $\bar{u}$ является плоскость $u_x = (\lambda - 1) u_y$ (рис.9).



Принимая во внимание поверхность Стокса, перепишем (1У.4.6) в виде

$$K_{i2_1}^{(2)} = \Omega_i^* + \tilde{\Omega}_i \quad i=0,1,2 \quad (1У.4.14)$$

где

$$\Omega_i^* \approx \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{-\infty}^{(\lambda-1)u_y} du_x \cdot w_i \phi_1^{(1)}(v_1) \quad (1У.4.15)$$

$$\tilde{\Omega}_i \approx \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{(\lambda-1)u_y}^{\lambda u_y} du_x \cdot w_i \phi_2^{(1)}(v_2) \quad (1У.4.16)$$

причем $v_1 = |\bar{u} - \bar{U}_1^{(1)}|$ $v_2 = |\bar{u} - \bar{U}_2^{(1)}|$ (1У.4.17)

Индекс "1" в (1У.4.15) означает, что в выражении для $\phi^{(1)}$ стоят значения $n^{(1)}$, $\bar{U}^{(1)}$, $h^{(1)}$ при $\beta^* \rightarrow \infty$ и индекс "2" в (1У.4.16) означает, что $\phi^{(1)}$ выражается через эти функции при $\beta^* \rightarrow 0$. Надо еще отметить, что в (1У.4.15) и (1У.4.16) Подинтегральные функции определяются при $\beta^* \rightarrow \infty$ и $\beta^* \rightarrow 0$ вплоть до поверхности Стокса. Делаем мы такое допущение только с целью упрощения дальнейших исследований.

После замены переменных $u_x - \frac{1}{2} = t$ в (1У.4.15), $u_x - \frac{4}{5} = t$ в (1У.4.16) и потом $t = -t$, получим

$$\Omega_i^* \approx \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{1}{2} - (\lambda-1)u_y}^{\infty} dt \cdot w_i^* \phi_1^{(1)}(v) \quad (1У.4.18)$$

$$\tilde{\Omega}_i \approx \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\frac{4}{5} - (\lambda-1)u_y}^{\frac{4}{5} - \lambda u_y} dt \cdot \tilde{w}_i \phi_2^{(1)}(v) \quad (1У.4.19)$$

где

$$v^2 = t^2 + u_y^2 + u_z^2 \quad (1Y.4.20)$$

$$W_0^* = 1 \quad W_1^* = \frac{1}{2} - t \quad W_2^* = v^2 - t + \frac{1}{4} \quad (1Y.4.21)$$

$$\tilde{W}_0 = 1 \quad \tilde{W}_1 = \frac{4}{5} - t \quad \tilde{W}_2 = v^2 - \frac{8}{5}t + \frac{16}{25} \quad (1Y.4.22)$$

Введем обозначения

$$R_{nk}^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\tau_n - \mu_k u_y}^{\infty} dt \cdot W_i^{(n)} \Phi_n^{(i)}(v) \quad (1Y.4.23)$$

$$n = 1, 2 \quad k = 1, 2 \quad i = 0, 1, 2$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} & \mu_1 &= \lambda & W_i^{(1)} &= W_i^* \\ \tau_2 &= \frac{4}{5} & \mu_2 &= \lambda - 1 & W_i^{(2)} &= \tilde{W}_i \end{aligned} \quad (1Y.4.27)$$

и по (1Y.1.15), (1Y.1.16) и (1Y.1.18)

$$\Phi_n^{(i)}(v) = \frac{h_n^{(i)2}}{\pi^2} h_n^{(i)} e^{-h_n^{(i)} v^2} \left\{ e^{-h_n^{(i)} v^2} + \frac{1}{2v} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(i)}}} \left(1 + 2h_n^{(i)} v^2 \right) \operatorname{erf} \left(v \sqrt{h_n^{(i)}} \right) \right\} \quad (1Y.4.25)$$

Принимая во внимание (1Y.4.23), перепишем (1Y.4.18) и (1Y.4.19) в виде

$$\Omega_i^* \approx R_{12}^{(i)} \quad (1Y.4.26)$$

$$\tilde{\Omega}_i \approx R_{21}^{(i)} - R_{22}^{(i)} \quad (1Y.4.27)$$

Как следует из (1У.4.23) $R_{nk}^{(i)} = O(h^{-1/2})$ и эти функции могут быть записаны следующим образом

$$R_{nk}^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{h}} \Psi_{nk}^{(i)}(\lambda) \quad \lambda \geq 0 \quad (1У.4.28)$$

где

$$\Psi_{nk}^{(i)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_0^{\infty} du_y \int_{\tau_n - \mu_k u_y}^{\infty} dt w_i^{(n)} \Phi_n^{(1)}(v) \quad (1У.4.29)$$

$n = 1, 2 \quad \kappa = 1, 2 \quad i = 0, 1, 2$

Принимая во внимание (1У.4.26)-(1У.4.28), по (1У.4.14) получим

$$K_{i2_1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{h}} \left\{ \Psi_{12}^{(i)} + \Psi_{21}^{(i)} - \Psi_{22}^{(i)} \right\} \quad i = 0, 1, 2 \quad (1У.4.30)$$

Отсюда видно, что $K_{i2_1}^{(2)} = O(h^{-1/2})$ и для окончательного результата требуется еще определить функции $\Psi_{nk}^{(i)}$. Эти исследования проводим в следующих параграфах, где исходим из выражения (1У.4.29), причем надо вычислить тройные интегралы, которых уже нельзя оценить асимптотически.

§ 5. Определение функций $\Psi_{nk}^{(i)}(\lambda)$.

Так как $\lambda \geq 0$, при вычислении $\Psi_{nk}^{(i)}(\lambda)$ по (1У.4.29), надо различать два случая, а именно случаи $\mu_k \geq 0$ и $\mu_k \leq 0$. Это различие влияет на вид области интегрирования (рис.10,11). Произведем поворот осей на угол Ψ , т.е. сделаем в (1У.4.29) замену переменных интегрирования t, u_y на ξ, η по формулам

$$\begin{aligned} t &= \xi \cos \Psi + \eta \sin \Psi \\ u_y &= \eta \cos \Psi - \xi \sin \Psi \end{aligned} \quad (1У.5.1)$$

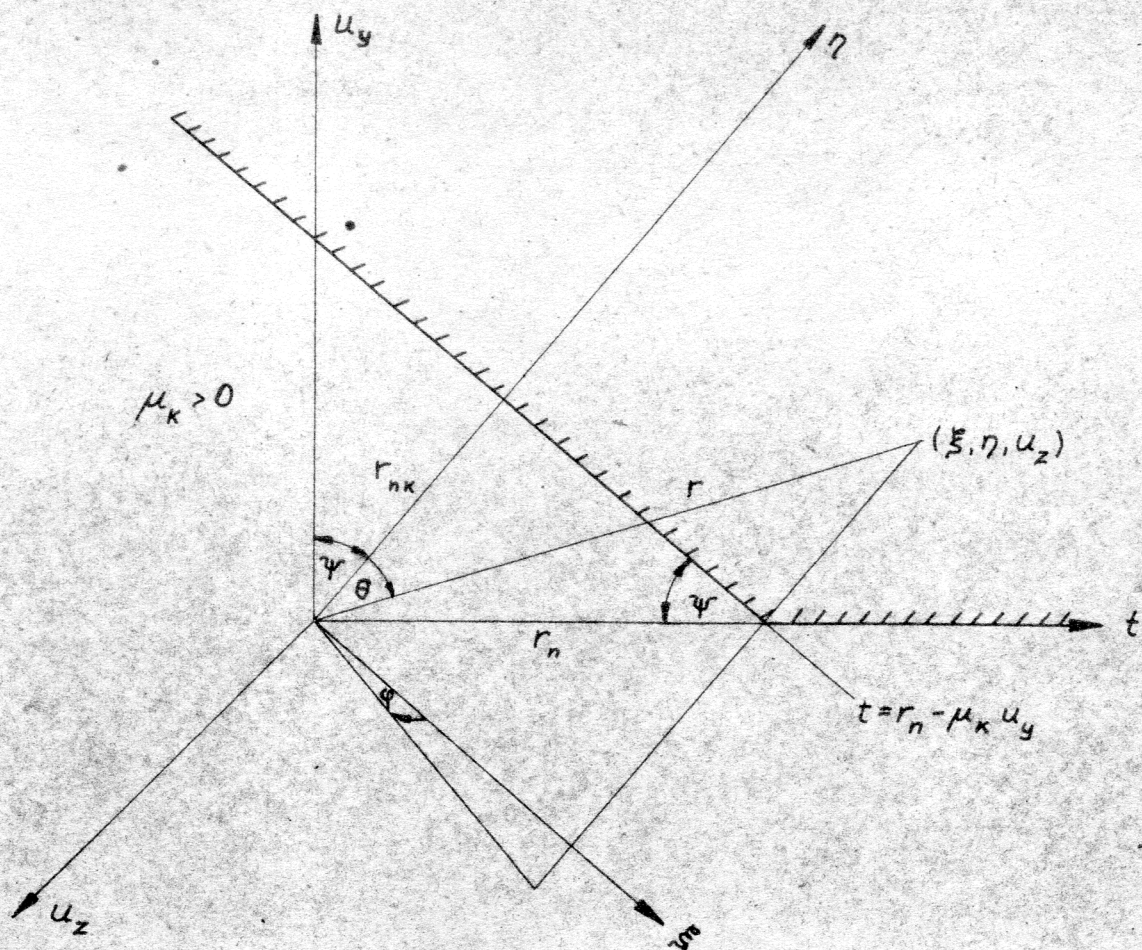


рис. 10

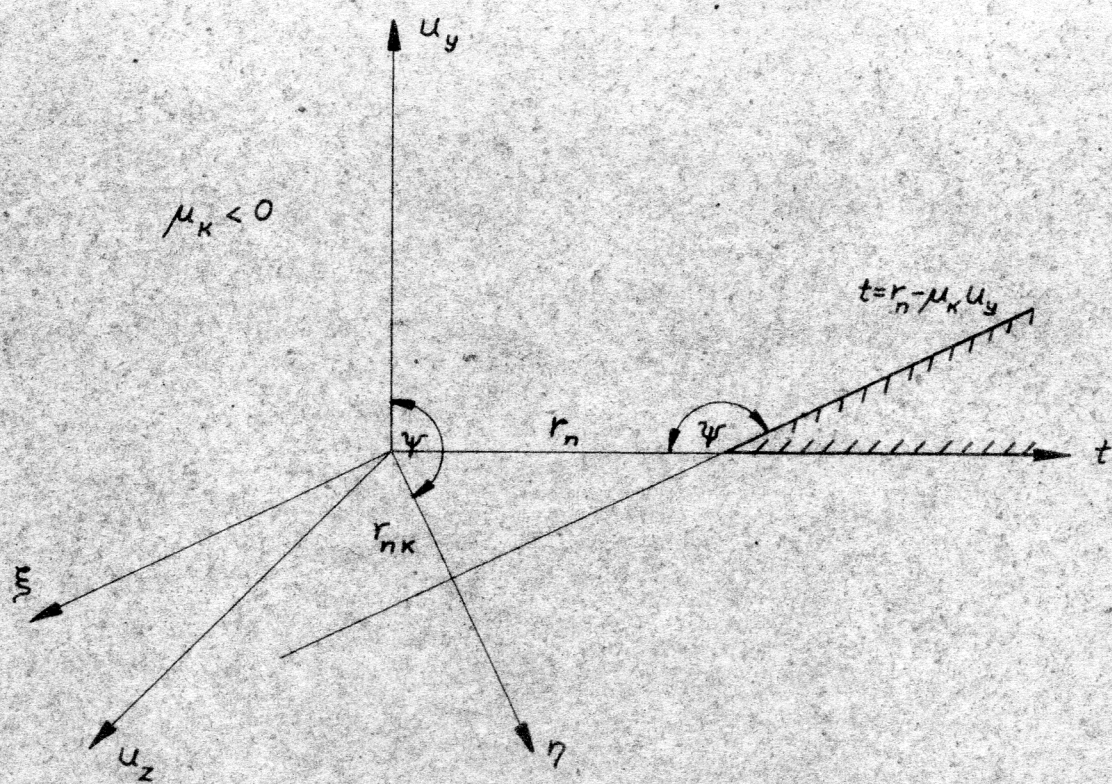


рис. 11

Тогда имеем (рис.10,11)

$$\Psi_{n\kappa}^{(i)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} du_z \int_{\tau_{n\kappa}}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\mu_{\kappa}\eta} d\tilde{z} \bar{W}_{i\kappa}^{(n)} \Phi_n^{(1)}(\tilde{v}) \quad (1Y.5.2)$$

где

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{1}{\mu_{\kappa}}, \quad \tau_{n\kappa} = \frac{\tau_n}{\sqrt{1+\mu_{\kappa}^2}} \quad (1Y.5.3)$$

$$\tilde{v}^2 = \tilde{z}^2 + \eta^2 + u_z^2 \quad (1Y.5.4)$$

$$\bar{W}_{0\kappa}^{(n)} = 1, \quad \bar{W}_{1\kappa}^{(n)} = \tau_n - g(\Psi, \tilde{z}, \eta), \quad \bar{W}_{2\kappa}^{(n)} = \tilde{v}^2 - 2\tau_n g(\Psi, \tilde{z}, \eta) + \tau_n^2 \quad (1Y.5.5)$$

$$g(\Psi, \tilde{z}, \eta) = \tilde{z} \cos \Psi + \eta \sin \Psi \quad (1Y.5.6)$$

Переходя в (1Y.5.2) к сферическим координатам (рис.10)

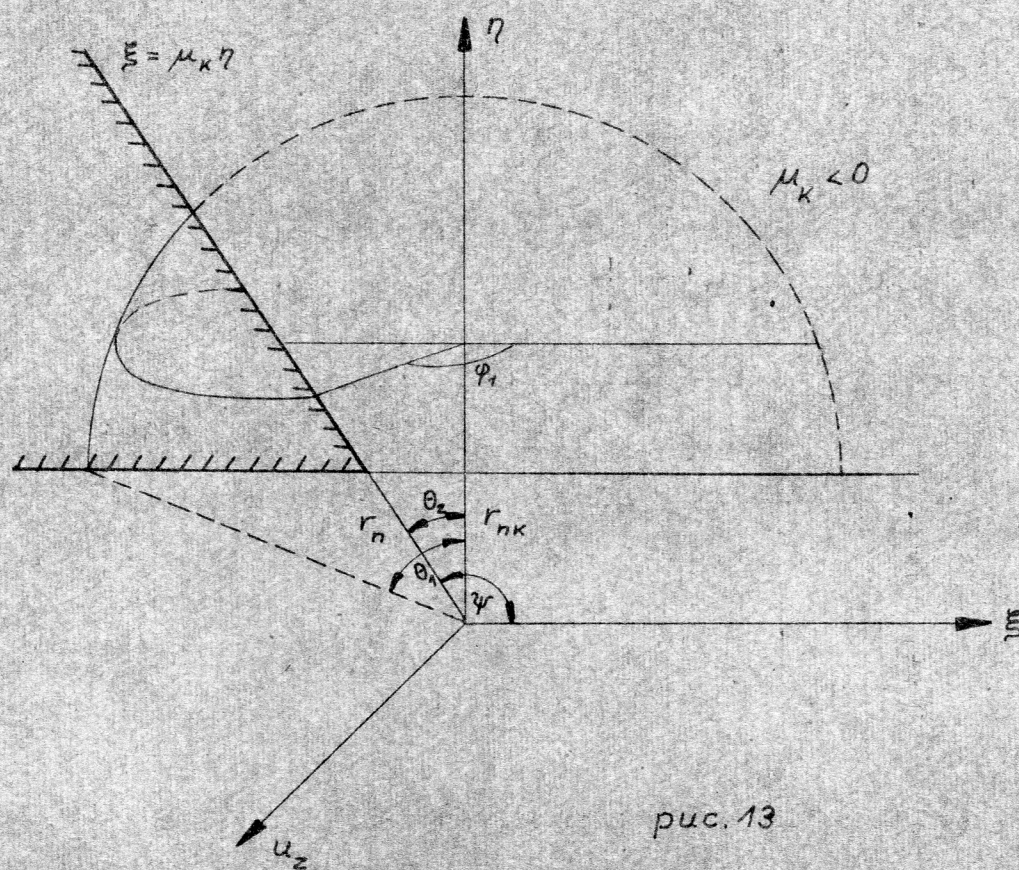
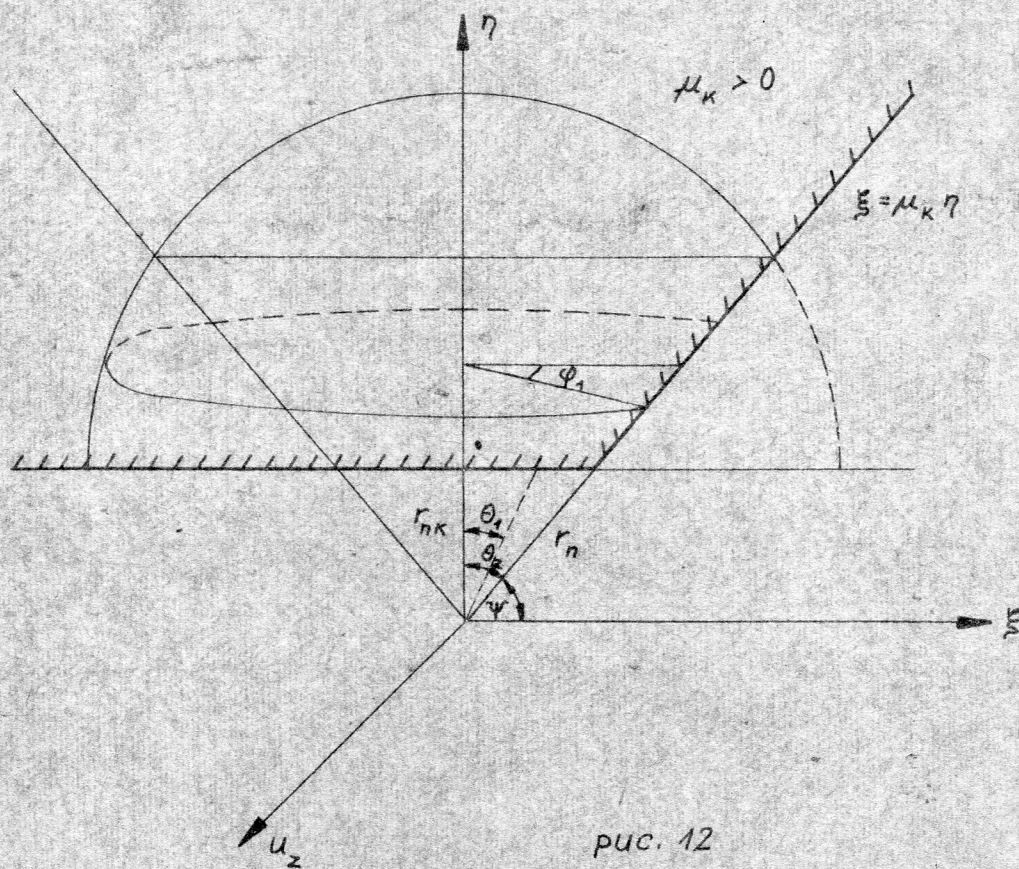
$$\begin{aligned} \tilde{z} &= r \sin \Theta \cos \Psi \\ \eta &= r \cos \Theta \\ u_z &= r \sin \Theta \sin \Psi \end{aligned} \quad \tilde{v} = r \quad (1Y.5.7)$$

получим (рис.12,13)

$$\Psi_{n\kappa}^{(i)} = \begin{cases} \Psi_{n\kappa}^{(i)*} & \mu_{\kappa} \leq 0 \\ \bar{\Psi}_{n\kappa}^{(i)} & \mu_{\kappa} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2 \\ n = 1, 2 \\ \kappa = 1, 2 \end{matrix} \quad (1Y.5.8)$$

где

$$\Psi_{n\kappa}^{(i)*} = \int_{\tau_n}^{\infty} dz \int_{\Theta_2}^{\Theta_1} d\Theta \int_{\Psi_1}^{2\pi-\Psi_1} d\Psi \, z^2 \sin \Theta \tilde{W}_{i\kappa}^{(n)} \Phi_n^{(1)}(z) \quad (1Y.5.9)$$



$$\bar{\Psi}_{nk}^{(i)} = \left\{ \int_{z_{nk}}^{z_n} dz \int_0^{\theta_1} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi + \int_{z_n}^{\infty} dz \left[\int_0^{\theta_2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi + \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta \int_{\varphi_1}^{2\pi-\varphi_1} d\varphi \right] \right\} z^2 \sin \theta \tilde{W}_{ik}^{(n)} \Phi_n^{(1)}(z) \quad (1Y.5.10)$$

причем

$$\tilde{W}_{0k}^{(n)} = 1, \quad \tilde{W}_{1k}^{(n)} = z_n - z g_1(\psi, \theta, \varphi), \quad \tilde{W}_{2k}^{(n)} = z^2 - 2z_n z g_1(\psi, \theta, \varphi) + z_n^2 \quad (1Y.5.11)$$

$$g_1(\psi, \theta, \varphi) = \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \cos \theta \quad (1Y.5.12)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{z_{nk}}{z}, \quad \cos \theta_2 = \frac{z_{nk}}{z_n} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}}, \quad \cos \varphi_1 = \mu_k \operatorname{ctg} \theta \quad (1Y.5.13)$$

Если ввести функции

$$H_{nki}^{(j)} = \iiint_{\omega_j} z^2 \sin \theta \chi_{ik} \Phi_n^{(1)}(z) dz d\theta d\varphi \quad (1Y.5.14)$$

$$n=1,2 \quad k=1,2 \quad i=0,1,2 \quad j=1,2,3$$

где

$$\chi_{0k} = 1, \quad \chi_{1k} = z g_1(\psi, \theta, \varphi), \quad \chi_{2k} = z^2 \quad (1Y.5.15)$$

$$\omega_1 = \left\{ \begin{array}{l} z_{nk} \leq z \leq z_n \\ 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}, \quad \omega_2 = \left\{ \begin{array}{l} z_n \leq z \leq \infty \\ 0 \leq \theta \leq \theta_2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}, \quad \omega_3 = \left\{ \begin{array}{l} z_n \leq z \leq \infty \\ \theta_2 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_1 \end{array} \right\} \quad (1Y.5.16)$$

то (1Y.5.8) можно переписать в виде

$$\Psi_{nk}^{(0)} = \begin{cases} H_{nko}^{(3)} & \mu_k \leq 0 \\ \sum_{j=1}^3 H_{nko}^{(j)} & \mu_k \geq 0 \end{cases} \quad (1Y.5.17)$$

$$\Psi_{nk}^{(1)} = \begin{cases} z_n H_{nko}^{(3)} - H_{nk1}^{(3)} & \mu_k \leq 0 \\ \sum_{j=1}^3 (z_n H_{nko}^{(j)} - H_{nk1}^{(j)}) & \mu_k \geq 0 \end{cases} \quad (IV.5.18)$$

$$\Psi_{nk}^{(2)} = \begin{cases} z_n^2 H_{nko}^{(3)} - 2z_n H_{nk1}^{(3)} + H_{nk2}^{(3)} & \mu_k \leq 0 \\ \sum_{j=1}^3 (z_n^2 H_{nko}^{(j)} - 2z_n H_{nk1}^{(j)} + H_{nk2}^{(j)}) & \mu_k \geq 0 \end{cases} \quad (IV.5.19)$$

Выразим в следующем параграфе $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$, $E^{(2)}$ через функции $H_{nki}^{(j)}$.

§ 6. Асимптотические выражения для $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$, $E^{(2)}$.

Ввиду (IV.4.30) $K_{i2,1}^{(2)}$ можно записать следующим образом

$$K_{i2,1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{h}} W_i(\lambda) \quad i = 0, 1, 2 \quad (IV.6.1)$$

где

$$W_i(\lambda) = \Psi_{12}^{(i)} + \Psi_{21}^{(i)} - \Psi_{22}^{(i)} \quad (IV.6.2)$$

Принимая во внимание (IV.5.17)-(IV.5.19) и тот факт, что $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \leq 0$ при $0 \leq \lambda \leq 1$ и $\mu_k \geq 0$, $k = 1, 2$ при $\lambda \geq 1$, из (IV.6.2) получим

$$W_0(\lambda) = V_0(\lambda) \quad (IV.6.3)$$

$$W_1(\lambda) = z_1 V_{01}(\lambda) + z_2 V_{02}(\lambda) - V_1(\lambda) \quad (IV.6.4)$$

$$W_2(\lambda) = z_1^2 V_{01}(\lambda) + z_2^2 V_{02}(\lambda) - 2z_1 V_{11}(\lambda) - 2z_2 V_{12}(\lambda) + V_3(\lambda) \quad (IV.6.5)$$

где

$$V_i(\lambda) = V_{i1}(\lambda) + V_{i2}(\lambda) \quad i = 0, 1, 2 \quad (IV.6.6)$$

$$V_{i1}(\lambda) = \begin{cases} H_{12i}^{(3)} & 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \sum_{j=1}^3 H_{12i}^{(j)} & \lambda \geq 1 \end{cases} \quad (\text{IV.6.7})$$

$$V_{i2}(\lambda) = \begin{cases} \sum_{j=1}^3 H_{21i}^{(j)} - H_{22i}^{(3)} & 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \sum_{j=1}^3 (H_{21i}^{(j)} - H_{22i}^{(j)}) & \lambda \geq 1 \end{cases} \quad (\text{IV.6.8})$$

Так как по (IV.2.21), (IV.3.8) и (IV.3.9) $K_{i2_2}^{(2)} = O(\varepsilon h^{-1/2})$ и $K_{i2_3}^{(2)} = O(h^{-1})$, главный член асимптотики для $K_{i2}^{(2)}$ (IV.2.17) получаем при оценке интеграла $K_{i2_1}^{(2)}$, а именно по (IV.6.1) имеем $K_{i2_1}^{(2)} = O(h^{-1/2})$. Вклад в главный член асимптотики $K_i^{(2)}$ (IV.2.7) дает и интеграл $K_{i1}^{(2)}$, так как по (IV.2.15) и (IV.2.16) $K_{i1}^{(2)} = O(h^{-1/2})$.

Отсюда следует, что главный член асимптотики функций $N^{(2)}$, $\rho_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$ получим именно тогда, когда в (IV.2.1) интегрируем по лучам I (влияние невозмущенного потока) и по всем лучам 3 в пограничном слое (см. рис. 7), что ясно из физических соображений. Принимая во внимание (IV.1.1)-(IV.1.3), (IV.1.8), (IV.1.10), (IV.2.7), (IV.2.15)-(IV.2.17), (IV.2.21), (IV.3.8), (IV.3.9), (IV.6.1)-(IV.6.8), получим следующие асимптотические формулы для $N^{(2)}$, $\rho_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$,

$$N^{(2)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \left\{ 1 + F_0 + O(y_0 h^{-1/2}) \right\} \quad (\text{IV.6.9})$$

$$\frac{1}{2} \rho_x^{(2)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} F_{01} + \frac{4}{5} F_{02} - F_1 + O(y_0 h^{-1/2}) \right\} \quad (\text{IV.6.10})$$

$$E^{(2)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} F_{01} + \frac{16}{25} F_{02} - F_{11} - \frac{8}{5} F_{12} + F_2 + O(y_0 h^{-1/2}) \right\} \quad (\text{IV.6.11})$$

$$F_i(\lambda) = 2\sqrt{\pi} V_i(\lambda) \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{IV.6.12})$$

Из (IV.6.6)-(IV.6.12) видно, что асимптотическое поведение $N^{(2)}$, $\rho_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$ неравномерно в окрестности точки $x = 0$. Для полного определения $N^{(2)}$, $\rho_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$ надо еще вычислить интегралы $H_{nki}^{(j)}$ по (IV.5.14).

§ 7. Вычисление интегралов $H_{nki}^{(j)}$

По (IV.5.14) имеем

$$H_{nki}^{(j)} = \iiint_{\omega_j} z^2 \sin \theta \chi_{ik} \Phi_n^{(1)}(z) dz d\theta d\varphi \quad (\text{IV.7.1})$$

$$n = 1, 2 \quad k = 1, 2 \quad i = 0, 1, 2 \quad j = 1, 2, 3$$

где $\Phi_n^{(1)}(z)$, χ_{ik} и ω_j определяются по (IV.4.25), (IV.5.15) и (IV.5.16). Как видно из (IV.6.7)-(IV.6.12) нам надо вычислить $H_{nki}^{(j)}$ по (IV.7.1) для всех значений n и k , кроме случая $n = 1, k = 1$.

1) Вычисление $H_{nko}^{(j)}$ и $H_{nks}^{(j)}$

Найдем сначала $H_{nko}^{(j)}$. Принимая во внимание (IV.5.15), по (IV.7.1) имеем

$$H_{nko}^{(j)} = \iiint_{\omega_j} z^2 \sin \theta \Phi_n^{(1)}(z) dz d\theta d\varphi \quad (\text{IV.7.2})$$

При $j = 1$ и $j = 2$ интегралы по θ и φ легко вычисляются, и мы получим

$$H_{nko}^{(1)} = 2\pi \left\{ C_{nk}^{(2)}(\lambda) - B_n^{(2)} - \tau_{nk} \left(C_{nk}^{(1)}(\lambda) - B_n^{(1)} \right) \right\} \quad (\text{IV.7.3})$$

$$H_{n\kappa 0}^{(2)} = 2\pi \left(1 - \frac{z_{n\kappa}}{z_n}\right) B_n^{(2)} \quad (\text{IV.7.4})$$

где

$$C_{n\kappa}^{(m)}(\lambda) = \int_{z_{n\kappa}}^{\infty} z^m \phi_n^{(1)}(z) dz \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{IV.7.5})$$

$$B_n^{(m)} = \int_{z_n}^{\infty} z^m \phi_n^{(1)}(z) dz \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{IV.7.6})$$

Эти интегралы также берутся. Подставляя в (IV.7.5) и (IV.7.6) $\phi_n^{(1)}(z)$ по (IV.4.25), получим следующие выражения:

$$B_n^{(m)} = \frac{h_n^{(1)2}}{\pi^2} h_n^{(1)} \left\{ L_n^{(m)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} J_n^{(m-1)} + \sqrt{\pi h_n^{(1)}} J_n^{(m+1)} \right\} \quad (\text{IV.7.7})$$

$$C_{n\kappa}^{(m)} = \frac{h_n^{(1)2}}{\pi^2} h_n^{(1)} \left\{ L_{n\kappa}^{(m)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} J_{n\kappa}^{(m-1)} + \sqrt{\pi h_n^{(1)}} J_{n\kappa}^{(m+1)} \right\} \quad (\text{IV.7.8})$$

причем

$$L_n^{(m)} = z_n^{m-1} L_n^{(1)} + \frac{m-1}{4 h_n^{(1)}} L_n^{(m-2)} \quad (\text{IV.7.9})$$

$$L_{n\kappa}^{(m)} = z_{n\kappa}^{m-1} L_{n\kappa}^{(1)} + \frac{m-1}{4 h_n^{(1)}} L_{n\kappa}^{(m-2)} \quad (\text{IV.7.10})$$

$$J_n^{(m)} = z_n^{m-1} P_n^{(0)} + \frac{m-1}{2 h_n^{(1)}} J_n^{(m-2)} + \frac{1}{\sqrt{\pi h_n^{(1)}}} L_n^{(m-1)} \quad (\text{IV.7.11})$$

$$J_{n\kappa}^{(m)} = z_{n\kappa}^{m-1} P_{n\kappa}^{(0)} + \frac{m-1}{2 h_n^{(1)}} J_{n\kappa}^{(m-2)} + \frac{1}{\sqrt{\pi h_n^{(1)}}} L_{n\kappa}^{(m-1)} \quad (\text{IV.7.12})$$

и (IV.7.9)-(IV.7.12) выражаются последовательно через

$$L_n^{(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} \left[1 - \operatorname{erf} \left(z_n \sqrt{2h_n^{(1)}} \right) \right]$$

$$L_{nk}^{(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} \left[1 - \operatorname{erf} \left(z_{nk} \sqrt{2h_n^{(1)}} \right) \right]$$

$$L_n^{(1)} = \frac{1}{4h_n^{(1)}} e^{-2h_n^{(1)} z_n^2}$$

$$L_{nk}^{(1)} = \frac{1}{4h_n^{(1)}} e^{-2h_n^{(1)} z_{nk}^2}$$

(IV.7.13)

$$J_n^{(0)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} \left\{ 1 - \left[\operatorname{erf} \left(z_n \sqrt{h_n^{(1)}} \right) \right]^2 \right\}$$

$$J_{nk}^{(0)} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{h_n^{(1)}}} \left\{ 1 - \left[\operatorname{erf} \left(z_{nk} \sqrt{h_n^{(1)}} \right) \right]^2 \right\}$$

$$P_n^{(0)} = \frac{1}{2h_n^{(1)}} e^{-h_n^{(1)} z_n^2} \operatorname{erf} \left(z_n \sqrt{h_n^{(1)}} \right)$$

$$P_{nk}^{(0)} = \frac{1}{2h_n^{(1)}} e^{-h_n^{(1)} z_{nk}^2} \operatorname{erf} \left(z_{nk} \sqrt{h_n^{(1)}} \right)$$

где $h_n^{(1)}$, z_n и z_{nk} определяются по (IV.4.13), (IV.4.24) и (IV.5.3). Таким образом $H_{nko}^{(1)}$ и $H_{nko}^{(2)}$ найдены. Осталось вычислить $H_{nko}^{(3)}$. При $j=3$, после интегрирования по φ , из (IV.7.2) получим

$$H_{nko}^{(3)} = 2 \int_{z_n \theta_2}^{\infty \theta_1} \int_{\pi - \varphi_1}^{\varphi_1} z^2 \sin \theta \Phi_n''(z) d\theta dz \quad (IV.7.14)$$

где θ_1 , θ_2 и φ_1 определяются по (IV.5.13).

Первый интеграл (IV.7.14) берется. Принимая во внимание (IV.5.13), выражение для $H_{nko}^{(3)}$ запишется в виде

$$H_{nko}^{(3)} = \lambda \left\{ \pi z_{nk} \left(\frac{1}{z_n} B_n^{(2)} - B_n^{(1)} \right) - V_{nk} \right\} \quad (IV.7.15)$$

где $B_n^{(1)}$ и $B_n^{(2)}$ вычисляются по (IV.7.7) и

$$V_{nk} = \int_{z_n}^{\infty} z^2 \phi_n^{(1)}(z) S_{nk}(z) dz \quad (IV.7.16)$$

причем

$$S_{nk}(z) = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin \theta \arccos(\mu_k \operatorname{ctg} \theta) d\theta \quad (IV.7.17)$$

После замены переменной $t = \operatorname{ctg} \theta$ в (IV.7.17), получим

$$S_{nk}(z) = \int_{\frac{z_{nk}}{\sqrt{z^2 - z_{nk}^2}}}^{\frac{1}{\mu_k}} \arccos(\mu_k t) \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$$

Интегрируя здесь по частям, будем иметь

$$S_{nk}(z) = -\frac{z_{nk}}{z} \arccos(A_{nk}) + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\mu_k^2 + 2A_{nk}^2 - 1}{\mu_k^2 + 1} \right) \quad (IV.7.18)$$

где

$$A_{nk}(z, \mu_k) = \mu_k \frac{z_{nk}}{\sqrt{z^2 - z_{nk}^2}} \quad (IV.7.19)$$

Подставляя (IV.7.18) в (IV.7.16) и принимая во внимание (IV.7.15), получим для $H_{nko}^{(3)}$

$$H_{nko}^{(3)} = 2\pi z_{nk} \left(\frac{1}{z_n} B_n^{(2)} - B_n^{(1)} \right) + 2z_{nk} D_{nk}^{(1)}(\lambda) - G_{nk}^{(2)}(\lambda) \quad (IV.7.20)$$

где

$$D_{nk}^{(m)}(\lambda) = \int_{z_n}^{\infty} z^m \phi_n^{(1)}(z) \operatorname{arccos}(A_{nk}) dz \quad m=0,1,2,\dots \quad (\text{IV.7.21})$$

$$G_{nk}^{(m)}(\lambda) = \int_{z_n}^{\infty} z^m \phi_n^{(1)}(z) \operatorname{arccos}\left(\frac{\mu_n^2 + 2A_{nk}^2 - 1}{\mu_n^2 + 1}\right) dz \quad m=0,1,2,\dots \quad (\text{IV.7.22})$$

причем A_{nk} и $\phi_n^{(1)}(z)$ определяются по (IV.7.19) и (IV.4.25).

Как видно из (IV.6.7)-(IV.6.12), в формулы для $N^{(2)}$, $\rho_x^{(2)}$, $E^{(2)}$ кроме $H_{nki}^{(3)}$ входит комбинация $\sum_{j=1}^3 H_{nki}^{(j)}$. Поэтому, принимая во внимание (IV.7.3), (IV.7.4) и (IV.7.20), для $\sum_{j=1}^3 H_{nko}^{(j)}$ получим

$$\sum_{j=1}^3 H_{nko}^{(j)} = 2\pi \left[C_{nk}^{(2)}(\lambda) - z_{nk} C_{nk}^{(1)}(\lambda) \right] + 2z_{nk} D_{nk}^{(1)}(\lambda) - G_{nk}^{(2)}(\lambda) \quad (\text{IV.7.23})$$

Формулы (IV.7.20) и (IV.7.23) дают нам возможность вычислить по (IV.6.9) частоту ударов $N^{(2)}$ о пластинку. Надо отметить, что в выражении для $N^{(2)}$ остались два простых интеграла $D_{nk}^{(1)}$ и $G_{nk}^{(2)}$, которые могут быть вычислены численно по (IV.7.21) и (IV.7.22).

Найдем теперь значения для $H_{nk2}^{(j)}$. Принимая во внимание (IV.5.15), по (IV.7.1) имеем

$$H_{nk2}^{(j)} = \iiint_{\omega_j} z^4 \sin \theta \phi_n^{(1)}(z) dz d\theta d\varphi \quad (\text{IV.7.24})$$

Отсюда легко видно, что интегралы по θ и φ вычисляются таким же образом как в случае $H_{nko}^{(j)}$. Разница в вычислениях $H_{nko}^{(j)}$ и $H_{nk2}^{(j)}$ состоит только в том, что вместо множителя z^2 в интеграле (IV.7.2) стоит в (IV.7.24) множитель z^4 . Поэтому, принимая во внимание (IV.7.20) и (IV.7.23), формулы для $H_{nk2}^{(3)}$ и $\sum_{j=1}^3 H_{nk2}^{(j)}$ сразу можно записать в следующем виде

$$H_{nk2}^{(3)} = 2\pi z_{nk} \left(\frac{1}{z_n} B_n^{(4)} - B_n^{(3)} \right) + 2z_{nk} D_{nk}^{(3)}(\lambda) - G_{nk}^{(4)}(\lambda) \quad (IV.7.25)$$

$$\sum_{j=1}^3 H_{nk2}^{(j)} = 2\pi \left[C_{nk}^{(4)}(\lambda) - z_{nk} C_{nk}^{(3)}(\lambda) \right] + 2z_{nk} D_{nk}^{(3)}(\lambda) - G_{nk}^{(4)}(\lambda) \quad (IV.7.26)$$

где $B_n^{(3)}$, $B_n^{(4)}$, $C_{nk}^{(3)}$, $C_{nk}^{(4)}$, $D_{nk}^{(3)}$, $G_{nk}^{(4)}$ определяются по (IV.7.7), (IV.7.8), (IV.7.21) и (IV.7.22). Тем самым $H_{nko}^{(j)}$ и $H_{nk2}^{(j)}$ найдены, осталось вычислить $H_{nk1}^{(j)}$.

2) Определение $H_{nk1}^{(j)}$

Принимая во внимание (IV.5.12) и (IV.5.15), по (IV.7.1) имеем

$$H_{nk1}^{(j)} = \iiint_{\omega_j} z^3 \sin \theta \Phi_n^{(1)}(z) \left[\cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \cos \theta \right] dz d\theta d\varphi \quad (IV.7.27)$$

Интегрируя в этом выражении при $j=1$ и $j=2$ по φ и θ , получим

$$H_{nk1}^{(1)} = \pi \sin \psi \left[C_{nk}^{(3)} - B_n^{(3)} - z_{nk}^2 \left(C_{nk}^{(1)} - B_n^{(1)} \right) \right] \quad (IV.7.28)$$

$$H_{nk1}^{(2)} = \pi \sin \psi \left(1 - \frac{z_{nk}^2}{z_n^2} \right) B_n^{(3)} \quad (IV.7.29)$$

причем $B_n^{(m)}$ и $C_{nk}^{(m)}$ определяются по (IV.7.7) и (IV.7.8)

При $j=3$ после интегрирования по φ , из (IV.7.27) получим

$$H_{nk1}^{(3)} = \pi \sin \psi z_{nk}^2 \left(\frac{1}{z_n^2} B_n^{(3)} - B_n^{(1)} \right) - 2 \int_{z_n}^{\infty} z^3 \Phi_n^{(1)}(z) \left[\sin \psi P_{nk}(z) + \cos \psi Q_{nk}(z) \right] dz \quad (IV.7.30)$$

где

$$P_{nk}(z) = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin \theta \cos \theta \operatorname{arccos}(\mu_k \operatorname{ctg} \theta) d\theta \quad (1Y.7.31)$$

$$Q_{nk}(z) = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin^2 \theta \sqrt{1 - \mu_k^2 \operatorname{ctg}^2 \theta} d\theta \quad (1Y.7.32)$$

После замены переменных $t = \operatorname{ctg} \theta$ в (1Y.7.31) и $t = \cos \theta$ в (1Y.7.32), будем иметь

$$P_{nk}(z) = \int_{\frac{z_{nk}}{\sqrt{z^2 - z_{nk}^2}}}^{\frac{1}{\mu_k}} \operatorname{arccos}(\mu_k t) \frac{t dt}{(1+t^2)^2} \quad (1Y.7.33)$$

$$Q_{nk}(z) = \int_{\frac{z_{nk}}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}}} \sqrt{1 - (1+\mu_k^2)t^2} dt \quad (1Y.7.34)$$

Преобразуя в (1Y.7.33) $\operatorname{arccos}(\mu_k t)$ по формуле $\operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, получим в (1Y.7.33) интегралы, которые берутся [51]. Интеграл в (1Y.7.34) также возьмется. В результате P_{nk} и Q_{nk} примут вид

$$P_{nk}(z) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{1+\mu_k^2} - \frac{z_{nk}^2}{z^2} \right] - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z_{nk}^2}{z^2} \right) \operatorname{arccos} \left(A_{nk} \right) - \frac{1}{2} \frac{\mu_k}{\sqrt{1+\mu_k^2}} \operatorname{arccos} \left(\frac{z_n}{z} \right) \quad (1Y.7.35)$$

$$Q_{nk}(z) = -\frac{z_{nk}}{2z} \sqrt{1 - \frac{z_n^2}{z^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} \operatorname{arccos} \left(\frac{z_n}{z} \right) \quad (1Y.7.36)$$

Подставляя (1Y.7.35) и (1Y.7.36) в (1Y.7.30), получим

$$H_{nk1}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} \left\{ D_{nk}^{(3)} - z_{nk}^2 D_{nk}^{(1)} + \mu_k z_{nk} E_n \right\} \quad (1Y.7.37)$$

где

$$E_n = \int_{z_n}^{\infty} z \sqrt{z^2 - z_n^2} \phi_n^{(1)}(z) dz \quad n=1,2 \quad (1\text{У.7.38})$$

и $D_{nk}^{(1)}$ и $D_{nk}^{(3)}$ найдутся по (1У.7.21). Складывая (1У.7.28), (1У.7.29) и (1У.7.37), получим

$$\sum_{j=1}^3 H_{nk1}^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} \left\{ \pi \left[C_{nk}^{(3)} - z_{nk}^2 \left(C_{nk}^{(1)} - B_n^{(1)} + \frac{1}{z_n^2} B_n^{(3)} \right) \right] + \right. \\ \left. + D_{nk}^{(3)} - z_{nk}^2 D_{nk}^{(1)} + \mu_k z_{nk} E_n \right\} \quad (1\text{У.7.39})$$

Таким образом $H_{nk1}^{(j)}$ найдены. Для определения $p_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$ нам понадобятся соотношения (1У.7.37) и (1У.7.39).

Как видно из (1У.6.6)-(1У.6.12) и полученных для $H_{nk1}^{(j)}$ формул (1У.7.20), (1У.7.23), (1У.7.25), (1У.7.26), (1У.7.37) и (1У.7.39), в выражениях для $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$ остались еще простые интегралы $D_{nk}^{(m)}$, $G_{nk}^{(m)}$ и E_n , которые выражаются по (1У.7.21), (1У.7.22) и (1У.7.38). E_n являются просто числами, а $D_{nk}^{(m)}$ и $G_{nk}^{(m)}$ зависят от параметра λ . Эти интегралы надо взять численно.

§ 8. Расчет примеров и результаты

В конце работы, в приложении III помещены графики безразмерных величин (отнесенных к величинам в невозмущенном потоке) частоты ударов N^* молекул о пластинку, касательного импульса p_x^* и энергии E^* , передаваемых молекулами пластинке, в зависимости от λ , где

$$\lambda = \frac{x}{y_0} \quad 0 < y_0 < \frac{1}{\sqrt{h}} \quad h = \frac{5}{6} M^2$$

$$N^* = h^* N^{(2)}, \quad p_x^* = \frac{1}{2} h^* p_x^{(2)}, \quad E^* = h^* E^{(2)} \quad h^* = 2\sqrt{\pi h}$$

причем $N^{(2)}$, $p_x^{(2)}$ и $E^{(2)}$ определяются по (1У.6.9)-(1У.6.11). Расчет N^* , p_x^* и E^* проводился по формулам (1У.6.9) - (1У.6.11) при разных значениях λ , причем входящие в эти формулы простые интегралы (1У.7.21), (1У.7.22) и (1У.7.38) вычислялись численно по методу Гаусса, аналогично главе II. В результате этих расчетов, достаточно громоздких, были получены выше указанные кривые. Из этих графиков видно, что N^* , p_x^* , E^* при $0 \leq \lambda < 1$ сначала почти постоянны и потом убывают. При $\lambda = 1$ достигается минимум этих величин. В промежутке $1 \leq \lambda \leq 5$ эти функции резко возрастают, а потом дальше вниз по потоку их значения выравниваются.

Наличие минимума функций N^* , p_x^* , E^* в окрестности точки $\lambda = 1$ (т.е. при $x \approx y_0$) может быть обусловлено тем, что мы рассматривали только однократные столкновения и так как M велико, набегающий поток в окрестности точки $x = 0$ отбрасывает только что образовавшийся поток отраженных частиц чуть дальше вниз по потоку, где сразу наблюдается резкое возрастание рассматриваемых величин. Их постоянство у самой кромки пластинки может быть обусловлено тем, что там просто еще не существует отраженный поток и вклад в значения функций N^* , p_x^* , E^* получается только от набегающих частиц. Короче говоря, за появление минимума функций N^* , p_x^* , E^* в окрестности точки $\lambda = 1$ отвечает эффект загораживания набегающих молекул потоком отраженных частиц. Можно ожидать, что при рассмотрении двух-, трехкратных, и т.д. столкновений этот эффект ослабляется, так как в этом случае меньше молекул падают на пластинку, следовательно меньше отражаются и посто-

му и меньше загоразиваются. Таким образом можно предполагать, что в дальнейших приближениях минимум функций N^* , p_x^* , E^* при $\lambda = 1$ выравнивается и значения этих функций при $0 \leq \lambda \leq 5$ возрастают от передней кромки пластинки вниз по потоку.

Проведем качественное сравнение полученных результатов с другими работами [30 - 39]. Мы проводим именно качественное сравнение, так как в указанных работах были получены потоки импульса и энергии на полубесконечной пластинке при различных M и температурах торможения, в то время как в данной работе эти величины были получены в зависимости от параметра λ . Надо отметить, что во всех этих работах исследуется взаимодействие ударной волны с пограничным слоем. У нас ударная волна не образуется так как пластинка бесконечно тонка. В теоретических работах авторы пользовались либо обычными уравнениями для пограничного слоя [30], [31], [36], либо строили полуэмпирическую теорию [38], в сильной степени базируясь на ряде экспериментальных фактов [37], [39]. При таком подходе было затруднительно исследовать поведение потоков массы, импульса и энергии в окрестности передней кромки пластинки, так как там возникает область течения со скольжением или зона единичных столкновений. Здесь исследования должны проводиться уже с кинетической точки зрения. Таким образом, в указанных работах были получены кривые для отношения давления на поверхности к давлению в невозмущенном потоке [35], [36] и для коэффициента теплообмена [37 - 39] в зависимости от x , начиная с некоторого расстояния x_0 от носка пластинки при различных M и температурах торможения. В точке $x = x_0$ эти функции имеют максимальное значение, потом дальше вниз по потоку эти величины убывают. Например, в экспериментальной работе [35]

первое отверстие для отбора давления расположено на расстоянии $x = 4,9$ мм от передней кромки. Существует разные предположения о поведении потоков импульса и энергии в области $0 \leq x \leq x_0$ [35], [37 - 39]. Так в [35] показано, что по данным тепловых фотографий отношение давлений на передней кромке, вычисленное по углу наклона ударной волны, значительно ниже отношения давлений в точке x_0 , расположенной несколько дальше по потоку за передней кромкой. То же самое получается для коэффициента теплообмена [37]. Отсюда делается вывод, что начиная от передней кромки, отношение давлений на пластинке увеличивается до некоторого максимального значения в точке, лежащей несколько дальше вниз по потоку, а потом убывает. В [38], [39] на основе полученного там соотношения для местных чисел Стантона делается вывод, что в зависимости от M набегающего потока значения тепловых потоков в зоне единичных столкновений могут или убывать (при малых M), или возрастать (при больших M) при удалении от передней кромки. Вид кривых этих величин в зависимости от x при $0 \leq x \leq x_0$ этим исследователям не был найден. Хорошее качественное совпадение полученных в данной работе кривых (кроме области $0 \leq x \leq 1$) имеется в результатах неопубликованной работы М.Н. Когана и А.М. Дегтярева (о расчете течений при больших числах Кнудсена 1964 г.). В этой работе получены кривые для потоков импульса и энергии на бесконечно тонкой пластинке бесконечного размаха длиной L при больших M . Расчет проводился численно по методу Монте-Карло на основе уравнения Больцмана в рамках однократных столкновений при различных M и Kn . Из этих кривых видно, что потоки импульса и энергии возрастают вдоль пластины от передней кром-

ки, причем это возрастание очень резко при малых χ , а потом дальше вниз по потоку значения этих величин выравниваются.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, М., 1961.
2. Аэродинамика разреженных газов. Сб. I под ред. С.В.Валландера, Изд. ЛГУ, 1963.
3. К.О.Фридрихс. Асимптотические явления в математической физике. "Математика", 1957, № 2.
4. Fulks W., Sather J.O. Laplaces method for multiple integrals. Pacific Journal, 1961, N 1.
5. Hsu L.C. Approximations to a class of double integrals of functions of large numbers. American Journal of Mathematics, 1948, vol.70, N 4.
6. Hsu L.C. A theorem on the asymptotic behavior of a multiple integral. Duke Math.Jour., 1948, vol. 15, N 3.
7. Hsu L.C. The asymptotic behavior of an integral involving a parameter. The science reports of National Tsing Hua University, 1949, vol.5, N 3.
8. Hsu L.C. On the asymptotic evaluation of a class of multiple integrals involving a parameter. American Journ. of Math., 1951, vol. 73, N 3.
9. Hsu L.C. The asymptotic behavior of a kind of multiple integrals involving a parameter. The Quart. Jour.of Math., 1951, vol.2, N 7.
10. Hsu L.C. On a kind of asymptotic integrals with integrands having absolute maximum at boundary points. Acta Math. Sinica, 1954, vol.4, N 3.

11. Н.А.Тихонов, А.А.Самарский. Асимптотическое разложение интегралов от пикообразных функций. Н.Д.В.Ш.физ.матем.науки, 1959, № 1.
12. Rooney P.G. Some remarks on Laplace's Method, Transaction of the Royal Society of Canada, 1953, vol.47, ser.III.
13. J.Focke. Asymptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationären Phase. Berichte über die Verhandlungen der Sächs. Akad.der Wissensch, zu Leipzig. Math,-naturwiss. Klasse, Bd.101, Heft 3, Akademie-Verlag Berlin, 1954.
14. R.Riedel. Asymptotische Darstellungen von Doppelintegralen mit stationärem Maximum. ZAMM, 1965, Bd.45, Heft 5.
15. Риекстыньш Э. Об асимптотическом представлении некоторых интегралов, зависящих от большого параметра. Ученые записки Лат.Гос.Унив., Математика, том 41, 1961.
16. Rarefied Gas Dynamics. Proc.of the II Intern.symp., Berkeley, 3.-6-VIII, 1960. Ed. by L.Talbot. N.Y. & L., Acad. press, 1961.
17. T.W.Johnston. Cartesian tensor scalar product and spherical harmonic expansions in Boltzmann's equation. Phys. Rev., 120, N 4, 1960.
18. Г.Град. О кинетической теории разреженных газов. "Механика", № 4, 1952, № 5, 1952.
19. И.И.Ольховский. Об одной плоской линейной задаче обобщенной гидродинамики. ДАН СССР, т.118, № 3, 1958.
20. И.И.Ольховский. О методе моментных приближений в обобщенной гидродинамике. ДАН СССР, т.126, № 4, 1959.

21. А. Адхамов. О решении уравнения Власова методом разложения по полиномам Эрмита. Ученые записки Тадж.Ун., № 18, 1958.
22. H.Grad.Note on N-dimensional Hermite polynomials.Comm.Pure Appl.Math., 2, N 4, 1949.
23. В.М.Елеонский, В.М.Иданов. О гидродинамическом приближении для ионизированного газа в сильном электрическом поле. ПМТФ, № 1, 1963.
24. Р.Г.Баранцев. Метод интегральных моментных кинетических уравнений. ДАН СССР, т.151, № 5, 1963.
25. "Аэродинамика разреженных газов", Сб.2 под ред. С.В.Валландера, Изд. ЛГУ, 1964.
26. Ebeling W. Kinetische Gleichungen und Momentengleichungen für inhomogene Plasmen. Ann.Phys.(DDR), 1964, 14, N7-8.
27. Э.Гросс, Э.Джексон, С.Зиринг. Граничные задачи в кинетической теории газов. "Механика", 1958, № 5.
28. М.Крук. Уравнения континуума в динамике разреженных газов. В сб. "Некоторые задачи современной аэродинамики". М., ИЛ, 1961.
29. "Аэродинамика разреженных газов", сб.3 под ред. С.В.Валландера, Изд. ЛГУ, 1966.
30. Галкин В.С. Исследование обтекания плоской пластины гиперзвуковым потоком вязкого слаборазреженного газа. ИАН, ОТН, мех. № 3, 1961.
31. Мясников В.П. Ламинарный пограничный слой на пластине в сверхзвуковом потоке слаборазреженного газа. ИАН, мех., № 5, 1959.
32. Холявко В.И. Обтекание пластины при больших сверхзвуковых скоростях. ИАН, мех., № 5, 1962.

33. Г.Нагамацу. Высокотемпературное разреженное гиперзвуковое течение около плоской пластины. *ARS Jour.*, 1961, 31, N 7
34. Nagamatsu, Li. On hypersonic flow near the leading edge of a flat plate. *Phys. Fluids* 3, N 1, 1960.
35. Г.Нагамацу, Р.Шир. Взаимодействие ударной волны с пограничным слоем и скольжение у передней кромки плоской пластины в гиперзвуковом потоке. В сб.: "Некоторые задачи современной аэродинамики". М., ИЛ, 1961.
36. Хэммит А.Г. Влияние вязкости на гиперзвуковое обтекание плоской пластины с конечной передней кромкой. "Механика", № 5, 1959.
37. Г.Нагамацу, Вейл, Р.Шир. Теплообмен на плоской пластине в потоке разреженного газа при очень больших числах Маха и высоких температурах. *Ракетная техника*, № 4, 1962.
38. Ю.А.Кошмаров. Полуэмпирическая теория теплообмена тонкой пластины, обтекаемой разреженным газом, при больших числах Маха. Тепло- и массоперенос, т. II, Минск, 1965.
39. Ю.А.Кошмаров, Н.М.Горская. Теплообмен пластины в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Тепло- и массоперенос, т. II, Минск, 1965.
40. Rarefied Gas Dynamics. Proc. of the I Intern. symp., held at Nice. Ed. by F.M. Devienne. London, Oxford, N.-Y., Paris, Pergamon Press, 1960.
41. Rarefied Gas Dynamics. Proc. of the III Intern. Symp., Paris, 1962. Ed. by I.A. Laurmann, N.-Y., L., Academic Press, 1963, vol. 1, vol. 2.
42. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, т. V, М., 1959.

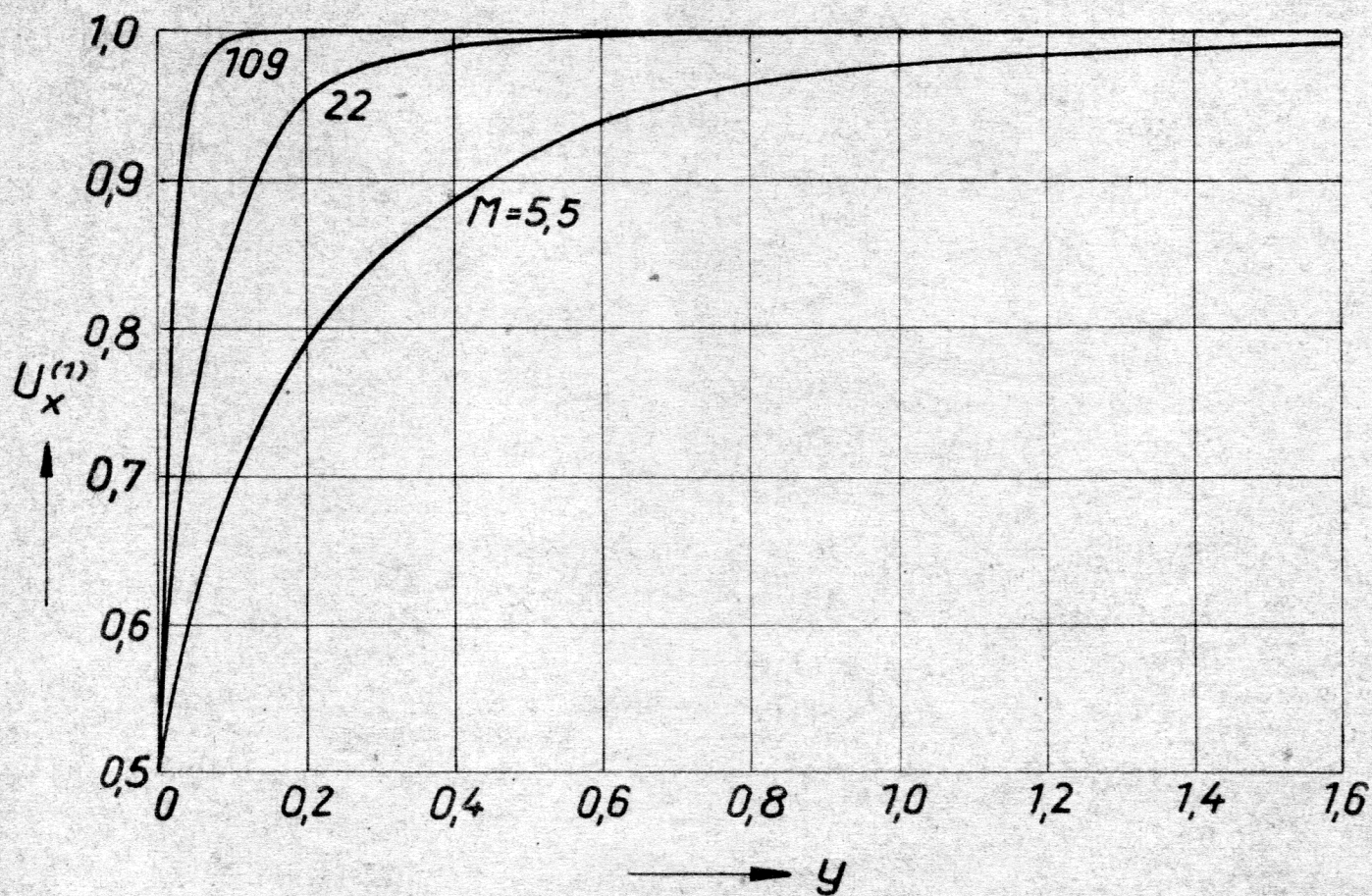
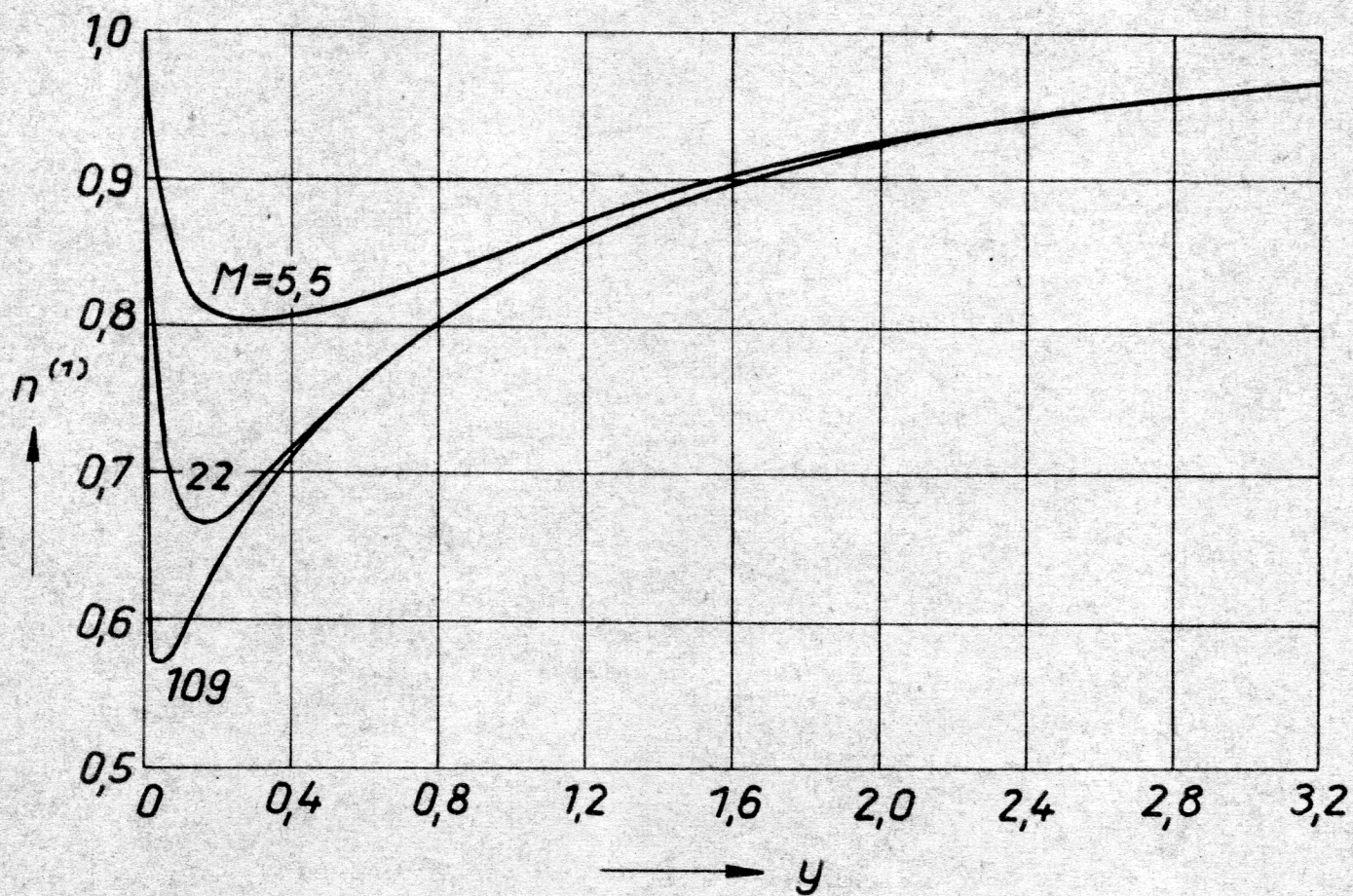
43. М.А.Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. М., ГИИМЛ, 1962.
44. Н.Г.де Брейн. Асимптотические методы в анализе. ИЛ, М., 1961.
45. Erdelyi A. Asymptotic expansions. New York, Dover, 1956.
46. М.Абрамовитц. Evaluation of the integral $\int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{x}{t}} dt$
J.of Math.and Phys., 32, N 2/3, 188, 1953.
47. Goodwin E.T., Staton J.: Table of $\int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u+x} du$
Quar.J.Mech.Appl.Math. 1, 319, 1948.
48. П.Веландер. Температурный скачок в разреженном газе. Приложение к книге М.Девиена "Течения и теплообмен разреженных газов". М., ИЛ, 1962.
49. К.П.Гросс, Е.А.Джексон. Кинетические модели и линеаризированное уравнение Больцмана. "Механика", № 5, 1960.
50. П.В.Медентьев. Приближенные вычисления. ФМ, М., 1962.
51. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ФМ, М., 1962.
52. Р.Г.Баранцев, Ю.Шлажа. К асимптотической структуре пограничного слоя при больших М. Вестник ЛГУ, сер. мат., № 19, вып. 4, 1964.
53. J.Szlaĳa. Zur asymptotischen Struktur der Grenzschicht am vorderen Ende einer halbumendlichen Platte für große Machzahlen. ZAMM, Bd.45, Heft 2/3, 1965.

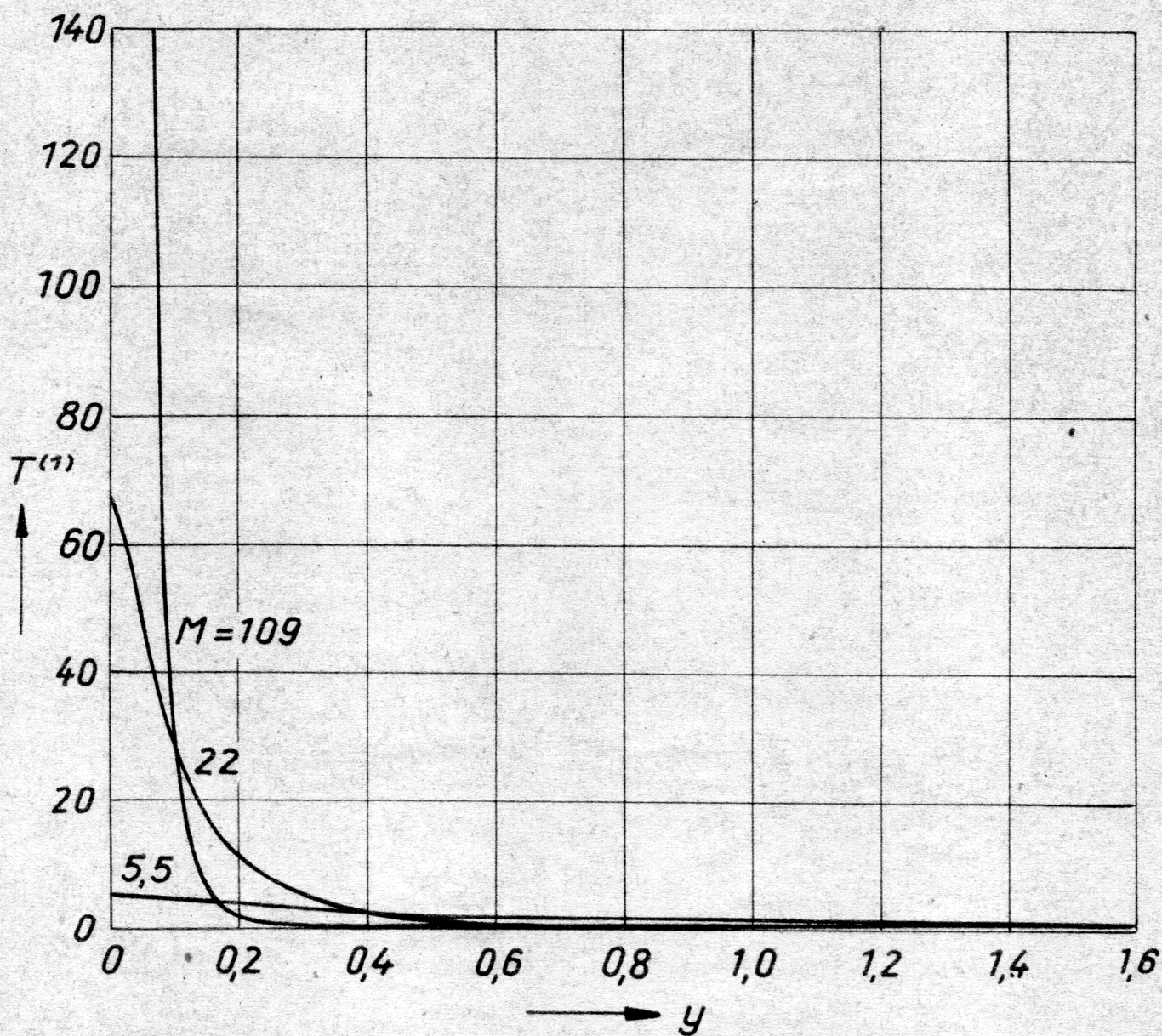
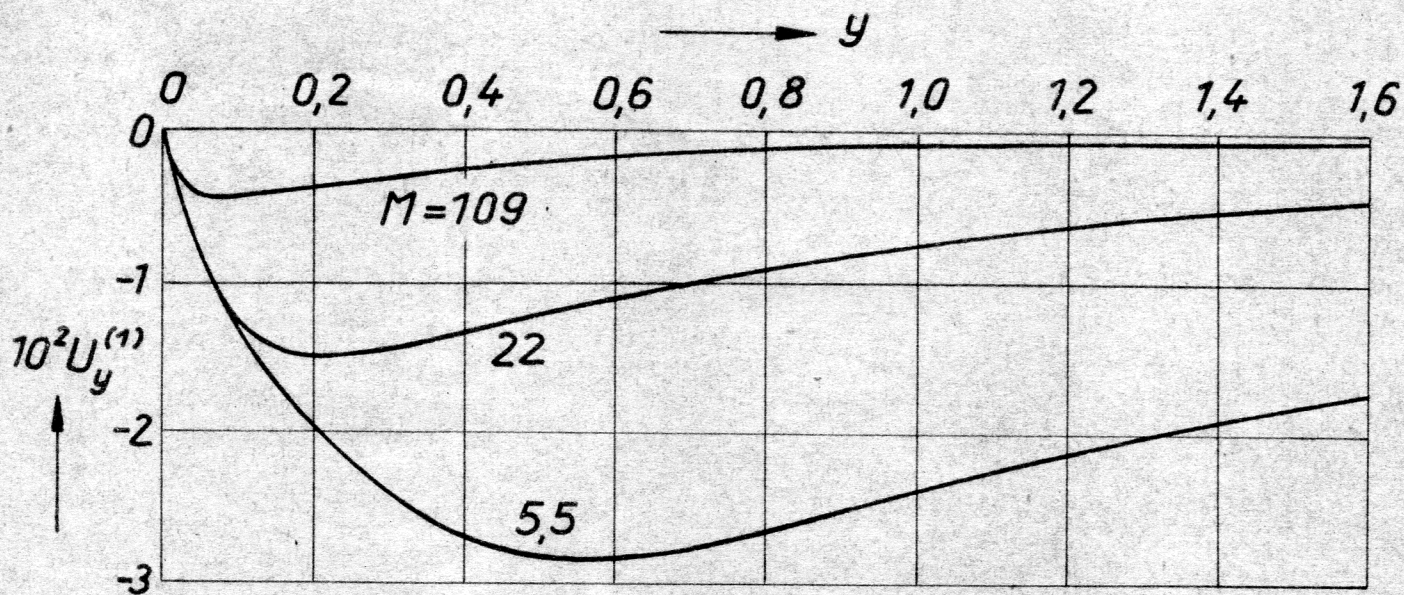
54. Ю.Шлаха. Метод моментов при гиперзвуковом обтекании тел разреженным газом. Вестник ЛГУ, 1966 (печатается).
55. J.Szlaža. Hyperschallumströmung einer unendlichen Platte durch verdünntes Gas. Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1966 (im Druck).
56. Ю.Шлаха. Асимптотика макропараметров газа при гиперзвуковом течении около носка пластинки. Вестник ЛГУ (печатается).
57. Ю.Шлаха. Асимптотическое поведение потоков массы, импульса и энергии на полубесконечной пластинке при больших M . Вестник ЛГУ (печатается).

П Р И Л О Ж Е Н И Е I

/ к главе II /

Графики безразмерных величин плотности $\rho^{(1)}$, средней скорости $\bar{U}^{(1)}$ и температуры $T^{(1)}$ в зависимости от расстояния y от пластинки при $M = 5,5; 22; 109$, в случае гиперзвукового продольного обтекания бесконечной пластинки разреженным газом.





$$M = 5477225$$

$$h = \frac{5}{6} M^2 = 25$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{h}}{2y}$$

α	y	$-10F_0$	-10^3F_1	$-10F_2$	$10H_5$	$10^3H_5U_{5x}$	$10H_5U_{5y}$	$10^3n_3T_5$	$n^{(1)}$	$U_x^{(1)}$	$-10^3U_y^{(1)}$	$T^{(1)}$
0	0	5	5.64190	5.3	5	0	5.64191	3	1	0.5	0	5.16667
$2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-5}$	4.99789	5.64144	5.29778	4.99040	0.01727	5.63977	2.99593	0.99825	0.50060	0.00220	5.16663
$8 \cdot 10^{-4}$	$32 \cdot 10^{-5}$	4.99267	5.64009	5.29229	4.96781	0.05656	5.63393	2.98622	0.99751	0.50204	0.00618	5.16648
$2 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$	4.98350	5.63738	5.28267	4.92988	0.12071	5.62205	2.96977	0.99464	0.50449	0.01541	5.16604
$8 \cdot 10^{-3}$	$32 \cdot 10^{-4}$	4.94511	5.62395	5.24242	4.78207	0.35770	5.55365	2.90387	0.98370	0.51427	0.06130	5.16138
$2 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	4.88108	5.59645	5.17544	4.53858	0.68745	5.45073	2.80128	0.96775	0.52966	0.15057	5.14894
$5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	4.74335	5.52762	5.03697	4.15492	1.20167	5.18476	2.60805	0.94066	0.55957	0.36513	5.09981
$8 \cdot 10^{-2}$	$32 \cdot 10^{-2}$	4.63472	5.46867	4.91872	3.86001	1.49840	4.93310	2.46013	0.92253	0.58327	0.58051	5.03900
$5 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	3.64272	4.49165	3.86347	1.69789	2.61315	2.93288	1.30622	0.80852	0.79321	1.92794	3.66274
1	$4 \cdot 10^{-1}$	2.87100	3.97127	3.10476	0.95409	2.72624	1.77642	0.73675	0.80831	0.89534	2.71537	2.34079
2	$8 \cdot 10^{-1}$	1.94840	2.90377	2.16607	0.29753	1.13046	0.68902	0.29507	0.83431	0.96641	2.65386	1.32962
4	$16 \cdot 10^{-1}$	7.00425	1.62852	7.19952	0.05321	0.32684	0.14640	0.06299	0.90440	0.98448	7.63789	0.83803
6	$24 \cdot 10^{-1}$	0.55552	0.94710	0.72460	0.01234	0.10463	0.03560	0.01537	0.94568	0.99860	0.96385	0.77866
10	4	0.18767	0.34002	0.30059	0.00050	0.01047	0.00031	0.00740	0.98732	0.99992	0.34337	0.92846
16	6	0.05321	0.10077	0.11250	0.00006	0.00090	0.00002	0.00011	0.99463	1.00000	0.10108	0.90607
25	10	0.00498	0.00890	0.01793	0.00000	0.00001	0.00000	0.00000	0.99950	1.00000	0.00991	0.87880
40	16	0.00002	0.00036	0.00119	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.99998	1.00000	0.00000	0.99932
∞	∞	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1

$$\alpha = \frac{\sqrt{h}}{2} y$$

$$h = \frac{5}{6} M^2 = 400$$

$$M = 0.219039 \cdot 10^2$$

α	y	$-10F_5$	$-10^3 E_1$	$-10F_2$	$10F_5$	$10^4 n_s U_{sx}$	$10^3 n_s U_{sy}$	$10^3 n_s T_s$	$n^{(1)}$	$U_x^{(1)}$	$-10^3 U_y^{(1)}$	$10^2 T^{(1)}$
0	0	5	1.41047	5.01975	5	0	1.41047	1.875	1	0.5	0	0.67667
$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	4.99940	1.41047	5.01815	4.99040	0.01070	1.40998	1.87246	0.99910	0.50051	0.00049	0.67667
$8 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-5}$	4.99789	1.41038	5.01683	4.98781	0.03535	1.40848	1.86390	0.99699	0.50172	0.00188	0.67663
$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	4.99578	1.41019	5.01392	4.98287	0.07544	1.40557	1.85607	0.99347	0.50378	0.00477	0.67663
$8 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	4.98350	1.40934	5.00220	4.78207	0.22356	1.39091	1.81492	0.97986	0.51198	0.01887	0.67623
$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	4.96334	1.40765	4.98193	4.55858	0.42966	1.35268	1.75078	0.95952	0.52496	0.04582	0.67499
$5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	4.91981	1.40339	4.93831	4.75492	0.75105	1.28604	1.63003	0.92357	0.55018	0.11624	0.66292
$8 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	4.88108	1.39911	4.89947	3.86004	0.93650	1.23328	1.53758	0.89789	0.57021	0.18469	0.66347
$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-2}$	4.48449	1.34402	4.50187	1.68789	1.63322	0.73922	0.81639	0.72134	0.76485	0.84676	0.48927
1	$1 \cdot 10^{-1}$	4.73977	1.28930	4.75587	0.95409	1.70390	0.44411	0.27795	0.68749	0.86025	1.23141	0.28964
2	$2 \cdot 10^{-1}$	3.61272	1.17434	3.62839	0.29153	0.70654	0.17226	0.78480	0.66788	0.95646	1.50038	0.11963
4	$4 \cdot 10^{-1}$	2.87100	0.99282	2.68561	0.05327	0.20427	0.03660	0.03937	0.71822	0.99262	1.33137	0.02763
6	$6 \cdot 10^{-1}$	2.34558	0.84640	2.36959	0.01234	0.06539	0.00890	0.00961	0.76668	0.99840	1.09237	0.01214
10	1	1.63922	0.62574	1.64646	0.00089	0.00534	0.00075	0.00088	0.83577	0.99989	0.74616	0.00786
16	1.5	1.08655	0.43658	1.09794	0.00006	0.00056	0.00006	0.00007	0.89145	0.99999	0.48969	0.00747
25	2.5	0.51744	0.22155	0.52779	0.00000	0.00007	0.00000	0.00000	0.94826	1.00000	0.28374	0.00762
40	4	0.18767	0.08500	0.19473	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.98123	1.00000	0.08663	0.00827
∞	∞	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0.01

$$M = 1.095445 \cdot 10^5$$

$$h = \frac{5}{6} M^2 = 10^4$$

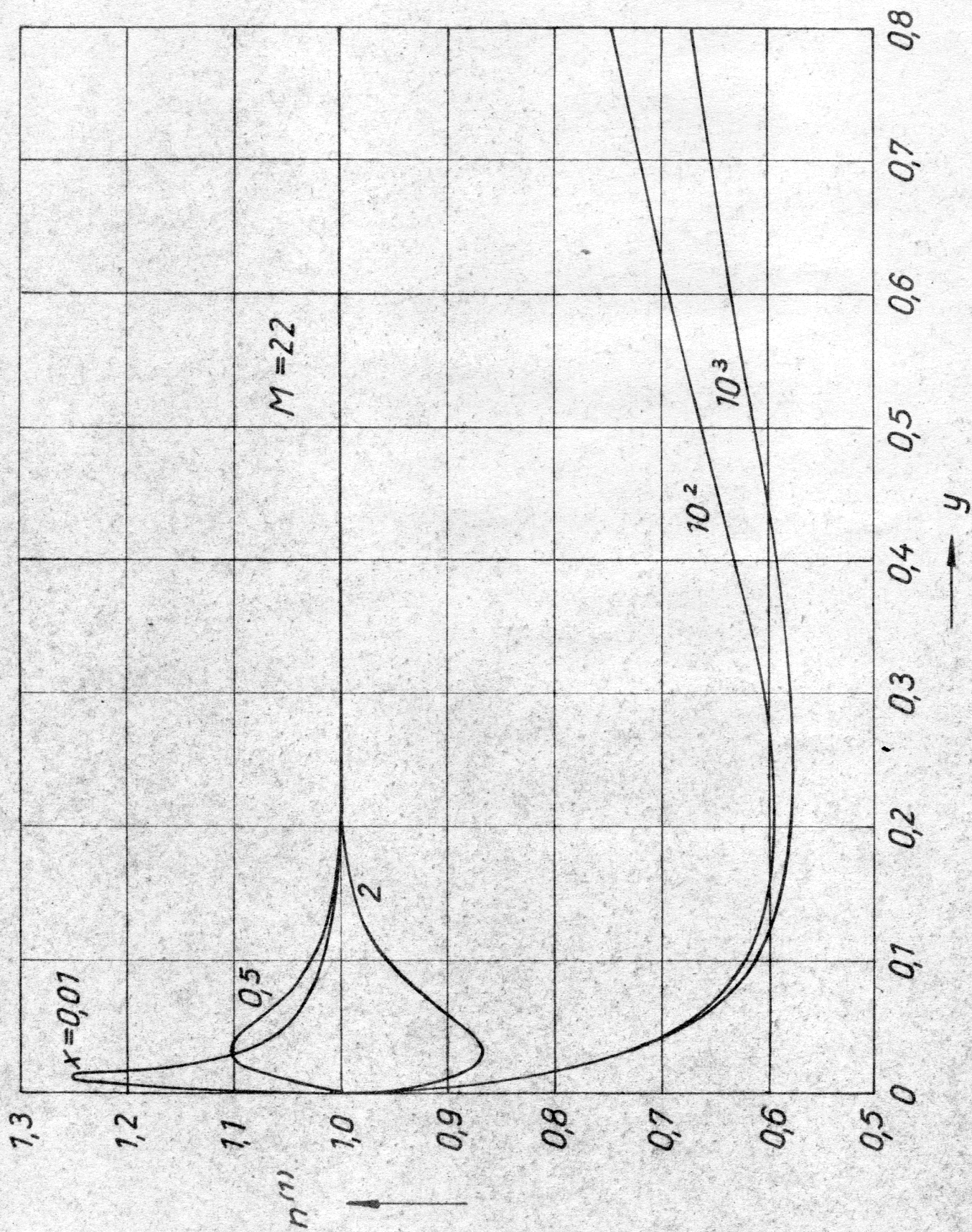
$$\alpha = \frac{\sqrt{h}}{2} y$$

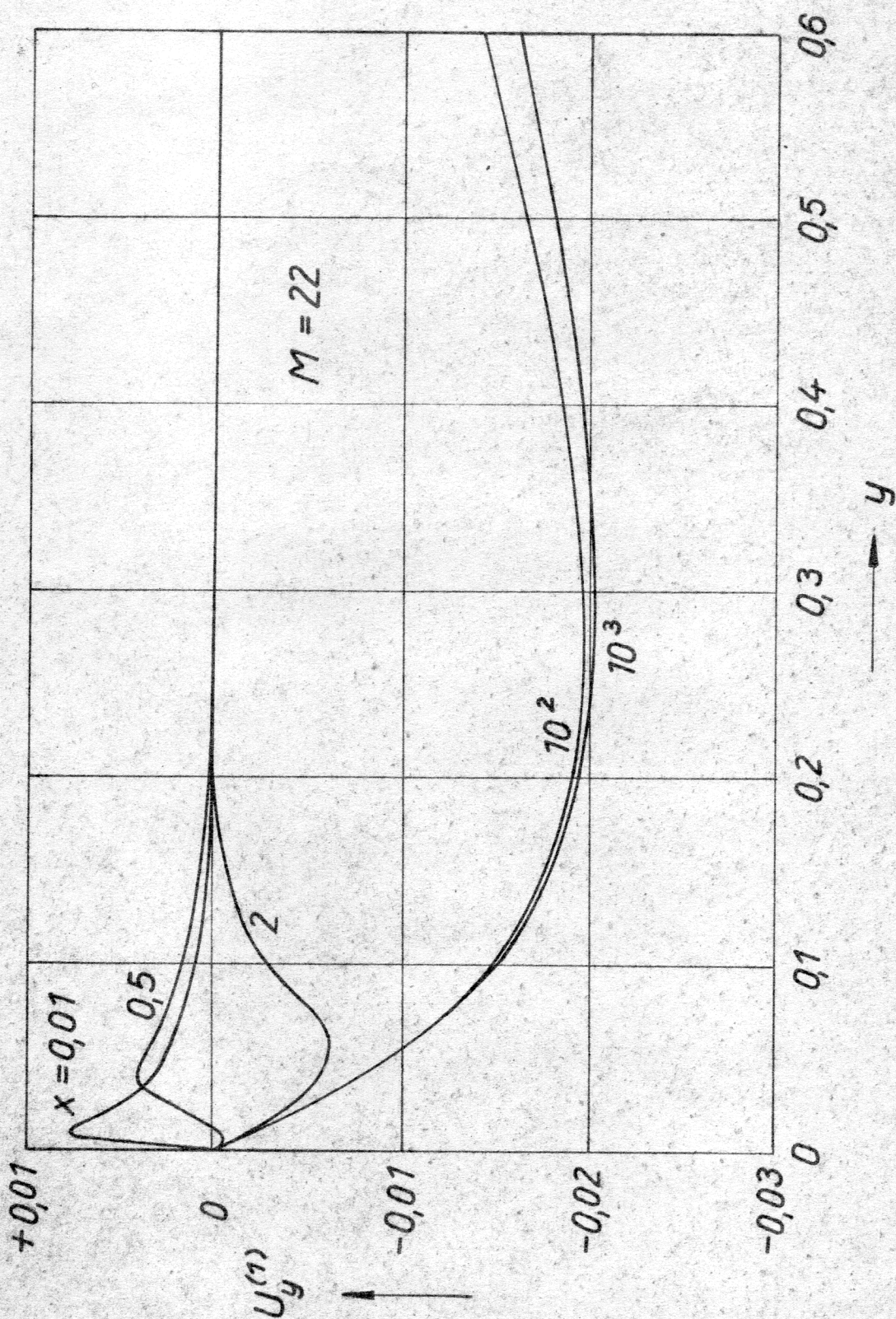
α	y	$-10^3 F_0$	$-10^3 F_1$	$-10^3 F_2$	$10 n_5$	$10^6 n_5 U_{5x}$	$10^3 n_5 U_{5y}$	$10^5 n_5 T_5$	$\rho \cdot n^{(1)}$	$U_x^{(1)}$	$-10^3 U_y^{(1)}$	$10^{-3} T^{(1)}$
0	0	5	2.82094	5	5	0	2.82095	7.5	1	0.5	0	1.66767
$2 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-6}$	4.99986	2.82094	5.00067	4.99040	0.04317	2.81985	7.48984	0.99905	0.50049	0.00108	1.66766
$3 \cdot 10^{-1}$	$16 \cdot 10^{-6}$	4.99957	2.82090	5.00026	4.96781	0.14139	2.81595	7.46556	0.99683	0.50164	0.00395	1.66765
$2 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-5}$	4.99388	2.82084	4.99663	4.92988	0.30177	2.81102	7.42427	0.99370	0.50359	0.00958	1.66758
$3 \cdot 10^{-1}$	$16 \cdot 10^{-5}$	4.99506	2.82050	4.98691	4.78207	0.89424	2.78182	7.25267	0.97860	0.51134	0.03951	1.66681
$2 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-4}$	4.99106	2.81982	4.98181	4.55858	1.71863	2.72537	7.00316	0.95675	0.52354	0.09872	1.66397
$3 \cdot 10^{-1}$	$10 \cdot 10^{-4}$	4.97994	2.81812	4.98069	4.15492	3.00418	2.59208	6.52712	0.91750	0.54715	0.24637	1.65284
$3 \cdot 10^{-1}$	$16 \cdot 10^{-4}$	4.96978	2.81643	4.97053	3.86001	3.74600	2.46655	6.15033	0.88902	0.56582	0.39355	1.63878
$5 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3}$	4.85641	2.79257	4.85714	1.69789	6.53288	1.46644	3.26555	0.68415	0.75193	1.93328	1.24384
1	$2 \cdot 10^{-3}$	4.74835	2.76387	4.74907	0.95409	6.81560	0.88827	1.96038	0.62057	0.84627	3.02237	0.86824
2	$4 \cdot 10^{-3}$	4.56552	2.70600	4.56622	0.29153	2.82615	0.34451	0.73918	0.57260	0.94909	4.12415	0.32298
4	$8 \cdot 10^{-3}$	4.26769	2.58982	4.26837	0.05321	8.17068	0.07330	0.15722	0.57855	0.99080	4.40172	0.06157
5	$12 \cdot 10^{-3}$	4.02023	2.47396	4.02089	0.01234	2.61563	0.01780	0.03843	0.59921	0.99794	4.09898	0.01453
10	$2 \cdot 10^{-1}$	3.61273	2.24586	3.61335	0.00090	0.02617	0.00153	0.00357	0.63882	0.99966	3.51327	0.00176
15	$3 \cdot 10^{-1}$	3.20519	1.97086	3.20580	0.00005	0.00225	0.00012	0.00028	0.67949	0.99999	2.90034	0.00038
25	$5 \cdot 10^{-1}$	2.58865	1.46360	2.58922	0.00000	0.00003	0.00000	0.00000	0.74714	1.00000	1.97481	0.00081
40	$3 \cdot 10^{-1}$	1.94840	0.81764	1.94894	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.80576	1.00000	1.00536	0.00079
$1 \cdot 10^2$	2	0.74248	0.51887	0.74293	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.92575	1.00000	0.66851	3.00015
$2 \cdot 10^2$	4	0.38767	0.17001	0.38795	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.98123	1.00000	0.17326	0.00083
$3 \cdot 10^2$	6	0.05327	0.05039	0.05336	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.99468	1.00000	0.05066	0.00097
∞	∞	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0.00100

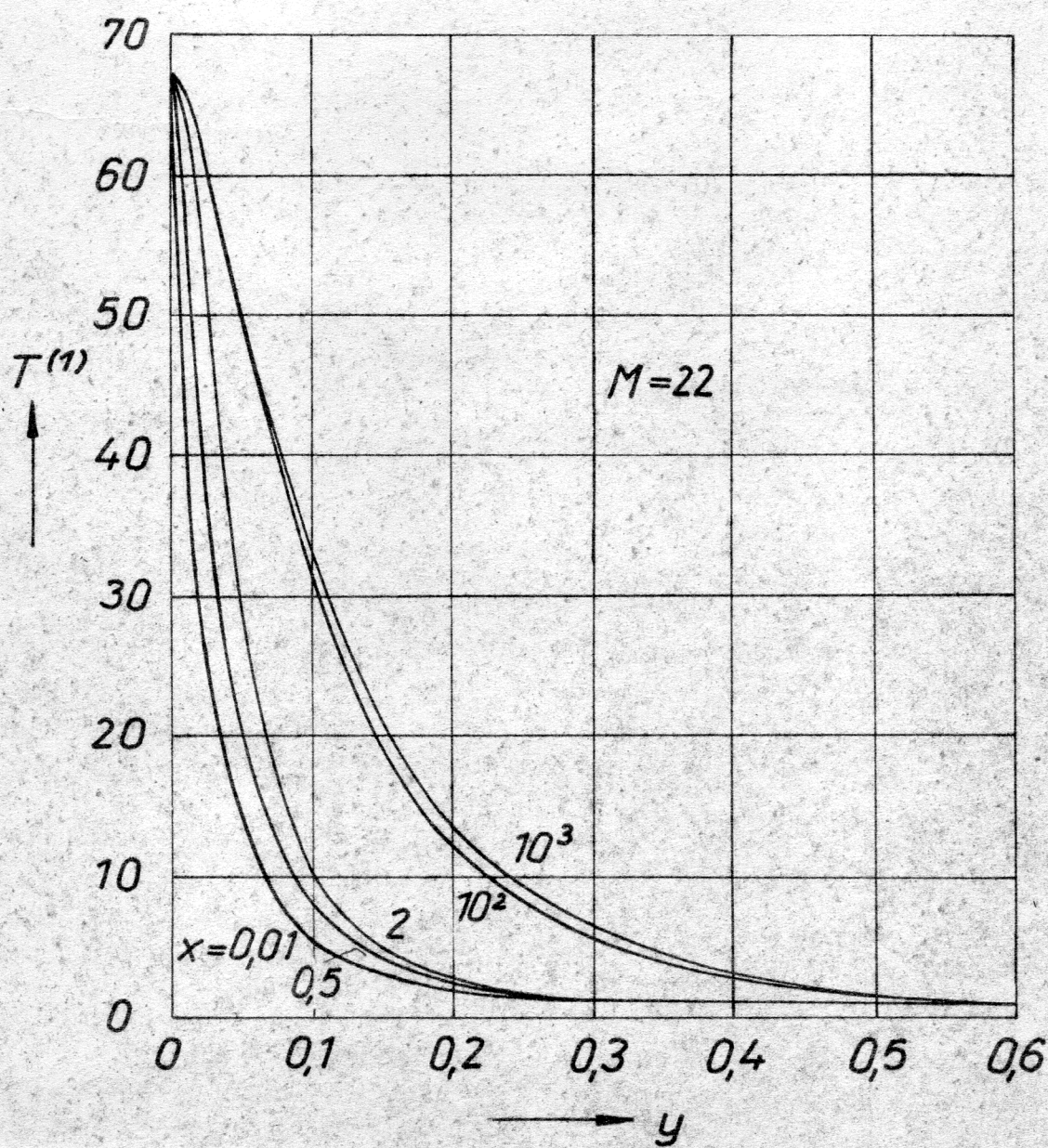
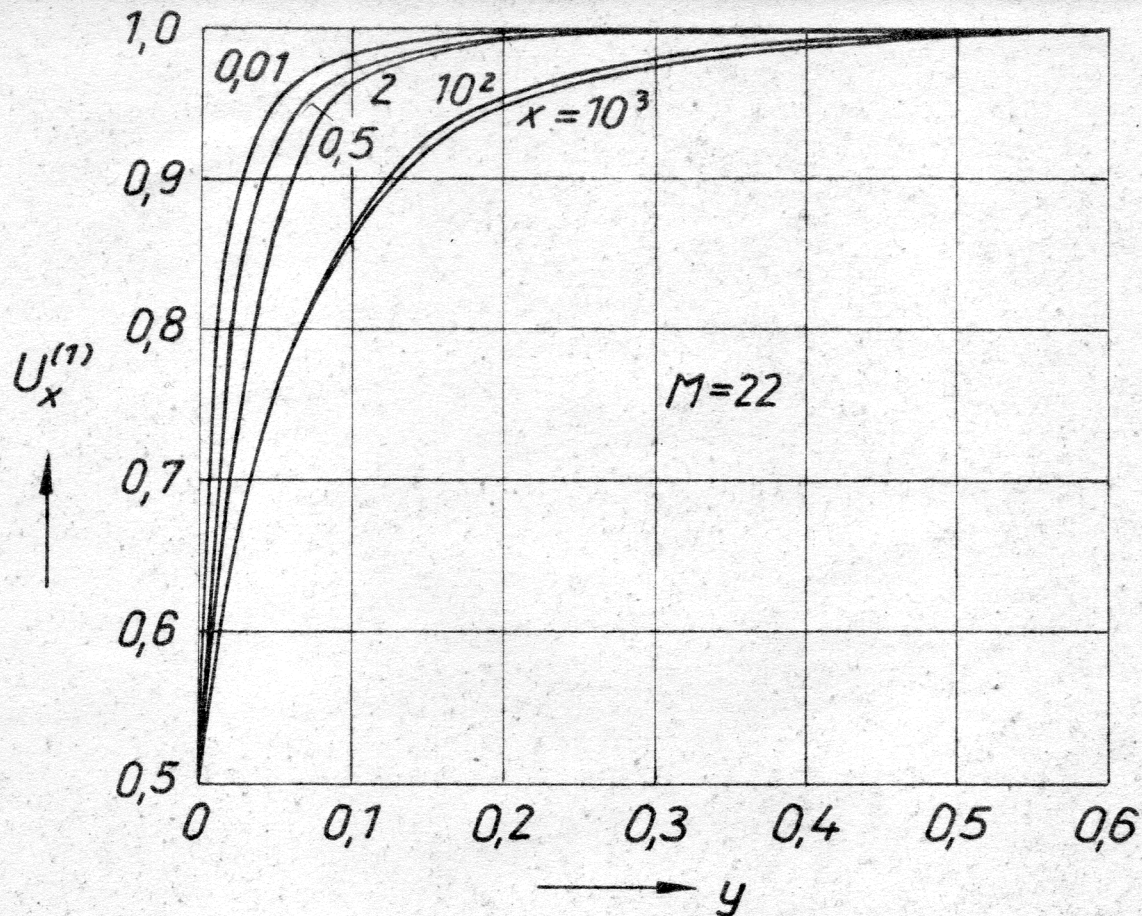
П Р И Л О Ж Е Н И Е II

/ к главе III /

Графики поведения безразмерных величин плотности $\eta^{(1)}$, средней скорости $\bar{U}^{(1)}$ и температуры $T^{(1)}$ газа в зависимости от расстояния y от поверхности пластинки при $M = 22$ и разных значениях расстояния $x = 10^{-2}$; 0,5; 2; 10^2 ; 10^3 ; от передней кромки пластинки в случае гиперзвукового продольного обтекания полубесконечной пластинки разреженным газом.







$$x = 0,01$$

y	β	α	$-F$	m_3	$10^3 \gamma_3 U_{3x}$	$10^3 \gamma_3 U_{3y}$	$10^3 \gamma_3 T_3$	$n^{(1)}$	$U_x^{(1)}$	$10^4 U_y^{(1)}$	$T^{(1)}$
0	0	0	1	0,5	0	1,410	0,188	1	0,5	0	67,667
0,01	1	0,2	0,986	0,234	0,973	0,940	0,114	1,234	0,812	0,762	41,379
0,02	2	0,4	0,956	0,142	0,720	0,629	0,074	1,142	0,677	0,552	29,584
0,04	4	0,8	0,848	0,070	0,050	0,351	0,039	1,070	0,935	0,328	17,070
0,06	6	1,2	0,694	0,040	0,027	0,216	0,024	1,040	0,961	0,207	10,811
0,1	10	2	0,366	0,016	0,011	0,099	0,011	1,016	0,984	0,097	5,215
0,2	20	4	0,018	0,003	0,002	0,018	0,002	1,003	0,997	0,018	1,750
0,5	60	12	0	0	0	0	0	1	1	0	1
1	100	20	0	0	0	0	0	1	1	0	1
3	300	60	0	0	0	0	0	1	1	0	1
5	500	100	0	0	0	0	0	1	1	0	1
∞	∞	∞	0	0	0	0	0	1	1	0	1

$$x = 0,5$$

y	γ	α	$-F$	n_s	$10^2 n_s U_{gr}$	$10^2 n_s U_{sy}$	$10^2 n_s T_s$	$n^{(1)}$	$U_x^{(1)}$	$10^2 U_y^{(1)}$	$T^{(1)}$
0	0	0	1	0,5	0	1,410	0,188	1	0,5	0	67,667
0,01	0,02	0,143	0,992	0,325	0,013	1,755	0,137	1,041	0,688	-0,037	55,497
0,02	0,04	0,348	0,983	0,217	0,016	0,881	0,114	1,091	0,801	+0,138	43,385
0,04	0,08	0,791	0,961	0,111	0,015	0,533	0,058	1,100	0,900	+0,398	25,037
0,06	0,12	1,200	0,941	0,068	0,012	0,370	0,038	1,067	0,937	+0,305	16,799
0,1	0,2	2	0,903	0,029	0,007	0,176	0,018	1,029	0,972	+0,171	8,323
0,2	0,4	4	0,806	0,005	0,002	0,033	0,004	1,005	0,995	+0,033	2,398
0,6	1,2	12	0,392	0	0	0	0	1	1	0	1
1	2	20	0,107	0	0	0	0	1	1	0	1
3	6	60	0	0	0	0	0	1	1	0	1
5	10	100	0	0	0	0	0	1	1	0	1
∞	∞	∞	0	0	0	0	0	1	1	0	1

$X = 2$

y	γ	α	$-F$	n_s	$10^2 \eta_3 U_{sx}$	$10^2 \eta_3 U_{sy}$	$10^2 \eta_3 T_s$	$n^{(1)}$	$U_x^{(1)}$	$10^6 U_y^{(1)}$	$T^{(1)}$
0	0	0	1	0,5	0	1,410	0,188	1	0,5	0	67,667
0,01	0,005	0,111	0,994	0,350	0,009	1,208	0,145	0,908	0,515	-0,199	64,116
0,02	0,01	0,244	0,988	0,253	0,015	1,006	0,116	0,878	0,701	-0,379	56,824
0,04	0,02	0,571	0,971	0,152	0,016	0,678	0,073	0,875	0,826	-0,550	38,227
0,06	0,03	0,962	0,953	0,090	0,014	0,453	0,048	0,901	0,900	-0,627	24,830
0,1	0,05	1,843	0,972	0,034	0,008	0,197	0,021	0,962	0,965	-0,287	9,972
0,2	0,1	3,991	0,818	0,005	0,002	0,034	0,004	1	0,995	+0,013	2,406
0,6	0,3	12	0,534	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0,5	20	0,326	0	0	0	0	1	1	0	1
3	1,5	60	0,004	0	0	0	0	1	1	0	1
5	2,5	100	0	0	0	0	0	1	1	0	1
∞	∞	∞	0	0	0	0	0	1	1	0	1

$$x = 10^2$$

y	γ	α	$-F$	n_3	$10^2 \eta_{3,5} x$	$10^2 \eta_{3,5} y$	$10^2 \eta_{3,7} z$	$n^{(1)}$	$U_x^{(1)}$	$10^2 U_y^{(1)}$	$T^{(1)}$
0	0	0	1	0.5	0	1.410	0.188	1	0.5	0	67.667
0.01	0	0.100	0.995	0.353	0.008	1.228	0.148	0.862	0.584	-0.204	65.803
0.02	0	0.200	0.990	0.286	0.013	1.066	0.124	0.734	0.639	-0.416	62.492
0.04	0	0.404	0.980	0.198	0.016	0.824	0.092	0.712	0.722	-0.784	54.282
0.06	0	0.608	0.970	0.144	0.016	0.650	0.072	0.686	0.783	-1.078	46.231
0.1	0.001	1.022	0.950	0.084	0.013	0.420	0.045	0.619	0.865	-1.425	32.027
0.2	0.002	2.090	0.907	0.027	0.007	0.136	0.017	0.593	0.955	-1.908	12.334
0.6	0.006	6.808	0.711	0	0	0	0	0.693	0.999	-1.425	1
1	0.010	12.227	0.542	0	0	0	0	0.789	1	-0.932	1
3	0.03	48.116	0.090	0	0	0	0	0.982	1	-0.091	1
5	0.05	92.135	0.010	0	0	0	0	0.999	1	-0.001	1
∞	∞	∞	0	0	0	0	0	1	1	0	1

$$x = 10^3$$

y	γ	α	$-F$	n_s	$10^4 n_3 U_{3x}$	$10^2 n_3 U_{3y}$	$10^4 T_3$	$n^{(1)}$	$U_x^{(1)}$	$10^2 U_y^{(1)}$	$T^{(1)}$
0	0	0	1	0,5	0	1,410	0,188	1	0,5	0	67,667
0,01	0	0,100	0,995	0,359	0,008	1,228	0,148	0,862	0,582	-0,204	66,300
0,02	0	0,200	0,990	0,287	0,013	1,067	0,124	0,792	0,638	-0,416	62,500
0,04	0	0,400	0,980	0,198	0,016	0,827	0,093	0,709	0,720	-0,783	54,785
0,06	0	0,601	0,970	0,146	0,016	0,656	0,072	0,661	0,780	-1,078	46,799
0,1	0	1,002	0,951	0,086	0,013	0,428	0,046	0,611	0,860	-1,494	33,702
0,2	0	2,009	0,904	0,029	0,007	0,145	0,018	0,579	0,950	-1,954	13,477
0,6	0,007	6,081	0,738	0	0,001	0	0	0,636	0,999	-1,628	1,107
1	0,001	10,226	0,600	0	0	0	0	0,706	1	-1,196	1,005
3	0,003	32,029	0,202	0	0	0	0	0,906	1	-0,373	1
5	0,005	55,623	0,062	0	0	0	0	0,972	1	-0,089	1
∞	∞	∞	0	0	0	0	0	1	1	0	1

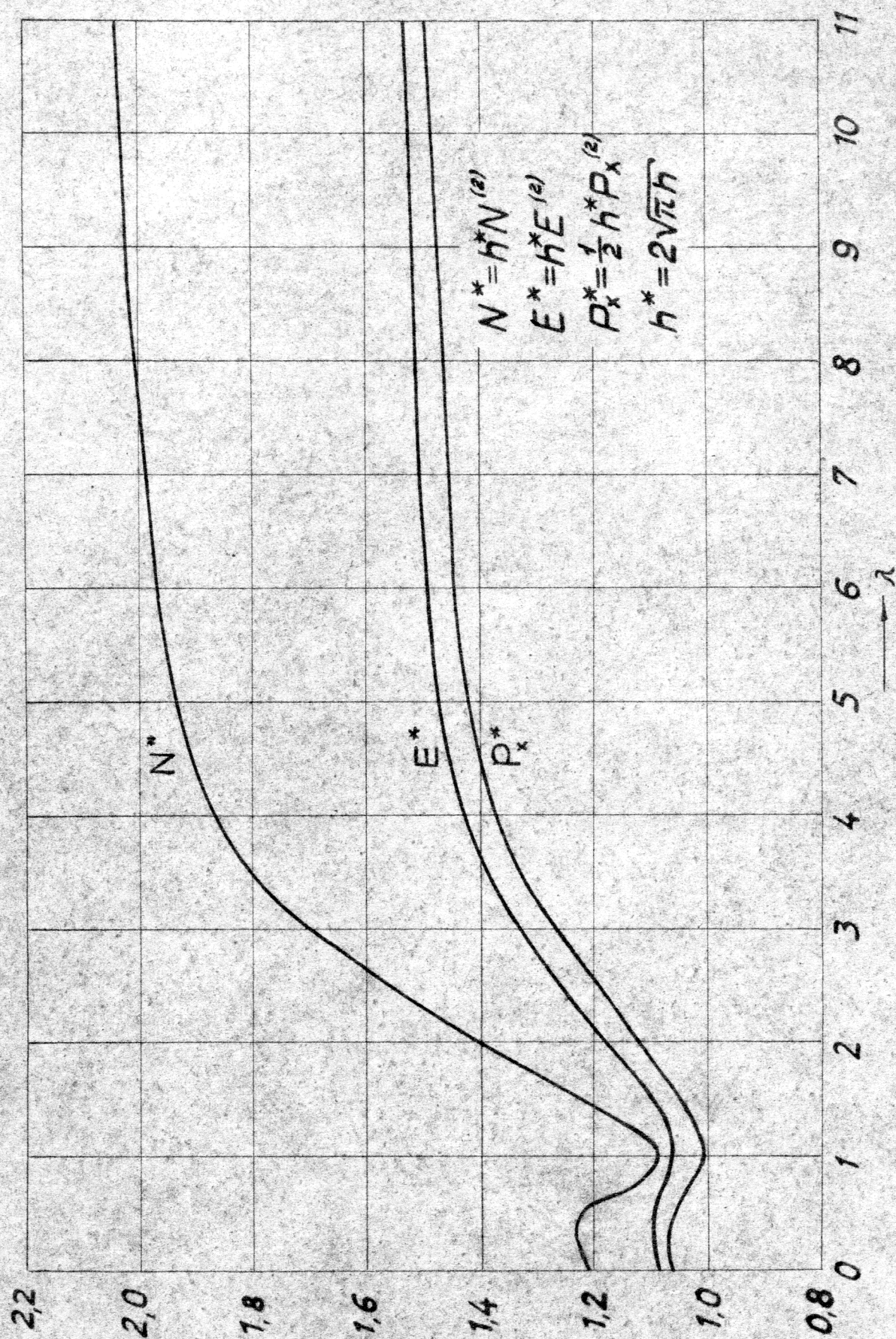
П Р И Л О Ж Е Н И Е III

/ к главе IV /

Графики безразмерных величин частоты ударов N^* молекул о тело, касательного импульса p_x^* и энергии E^* , передаваемых молекулами пластинке, в зависимости от λ , где

$$\lambda = \frac{x}{y_0}, \quad 0 < y_0 < \frac{1}{\sqrt{h}}, \quad h = \frac{5}{6} M^2$$

$$N^* = h^* N^{(2)}, \quad p_x^* = \frac{1}{2} h^* p_x^{(2)}, \quad E^* = h^* E^{(2)} \quad h^* = 2\sqrt{\pi h}$$



λ	N^*	P^*	E^*
0	1,21316	1,06609	1,08634
0,05	1,21619	1,06732	1,08742
0,2	1,22341	1,07147	1,08981
0,5	1,22096	1,06974	1,09052
1	1,09341	1,00293	1,06071
3	1,69887	1,26568	1,33141
5	1,93919	1,42169	1,47483
7	1,98979	1,45631	1,50616
10	2,03058	1,48439	1,53071
∞	2,15470	1,51735	1,55718

$$\lambda = \frac{x}{y_0} \quad 0 < y_0 < h^{-\frac{1}{2}}$$

λ	$10r_{12}$	$10r_{21}$	$10r_{22}$
0	3,53553	8,00000	5,65685
0,05	3,62500	7,99002	5,80000
0,2	3,90434	7,84465	6,24694
0,5	4,47214	7,15542	7,15542
1	5,00000	5,65685	8,00000
3	2,23607	2,52982	3,57771
5	1,21267	1,56893	1,94027
7	0,82200	1,13137	1,31519
10	0,55216	0,79603	0,88345
∞	0	0	0

$$B_1^{(1)} = 3,77179 \cdot 10^{-2}$$

$$B_1^{(2)} = 2,44981 \cdot 10^{-2}$$

$$B_1^{(3)} = 1,05001 \cdot 10^{-2}$$

$$B_1^{(4)} = 1,15823 \cdot 10^{-2}$$

$$B_2^{(1)} = 0,09842 \cdot 10^{-2}$$

$$B_2^{(2)} = 0,08518 \cdot 10^{-2}$$

$$B_2^{(3)} = 0,07410 \cdot 10^{-2}$$

$$B_2^{(4)} = 0,06724 \cdot 10^{-2}$$

$$E_1 = 1,45557 \cdot 10^{-2}$$

$$E_2 = 0,028350 \cdot 10^{-2}$$

λ	$10 \cdot C_{12}^{(1)}$	$10 \cdot C_{21}^{(1)}$	$10 \cdot C_{22}^{(1)}$	$10 \cdot C_{12}^{(2)}$	$10 \cdot C_{21}^{(2)}$	$10 \cdot C_{22}^{(2)}$
0	0,71344	0,00985	0,15654	0,38677	0,00852	0,10265
0,05	0,68941	0,00998	0,13625	0,37876	0,00863	0,09103
0,2	0,62009	0,01222	0,08614	0,35701	0,01040	0,06091
0,5	0,48767	0,03014	0,03014	0,29725	0,02376	0,02376
1	0,37718	0,15654	0,00985	0,24498	0,10265	0,00859
3	1,02753	1,25864	0,76199	0,47830	0,52271	0,37156
5	1,21557	1,69083	1,53936	0,51445	0,61322	0,58572
7	1,26185	1,85282	1,79181	0,51621	0,63438	0,62695
10	1,28395	1,94277	1,92192	0,51774	0,64316	0,64140
∞	1,30238	2,03497	2,03497	0,51842	0,64803	0,64803

λ	$10 \cdot C_{12}^{(3)}$	$10 \cdot C_{21}^{(3)}$	$10 \cdot C_{22}^{(3)}$	$10 \cdot C_{12}^{(4)}$	$10 \cdot C_{21}^{(4)}$	$10 \cdot C_{22}^{(4)}$
0	0,27202	0,00741	0,06831	0,12163	0,00621	0,04313
0,05	0,26520	0,00750	0,06166	0,11945	0,00693	0,03997
0,2	0,25322	0,00890	0,04355	0,10532	0,00765	0,02753
0,5	0,22586	0,01886	0,01886	0,09125	0,00941	0,01025
1	0,19640	0,06831	0,00741	0,07834	0,04526	0,00621
3	0,30072	0,23620	0,18975	0,14326	0,11753	0,06716
5	0,30787	0,25523	0,25047	0,14523	0,13274	0,08973
7	0,30845	0,25817	0,25722	0,14912	0,13516	0,09156
10	0,30858	0,25899	0,25884	0,14983	0,13574	0,09473
∞	0,30861	0,25928	0,25928	0,15082	0,13619	0,09543

λ	$10 \cdot D_2^{(1)}$	$10^2 \cdot D_{21}^{(1)}$	$10^2 \cdot D_{22}^{(1)}$	$10 \cdot D_{12}^{(3)}$	$10^2 \cdot D_{21}^{(3)}$	$10^2 \cdot D_{22}^{(3)}$
0	0,89478	0,15365	0,26032	0,37714	0,11577	0,19433
0,05	0,89042	0,13948	0,25931	0,37524	0,11548	0,19355
0,2	0,87420	0,10335	0,25546	0,36828	0,07921	0,19061
0,5	0,82000	0,06599	0,24111	0,34868	0,06153	0,17975
1	0,59175	0,05138	0,15365	0,25926	0,04159	0,11574
3	0,24992	0,03669	0,03861	0,12424	0,02919	0,03068
5	0,23678	0,03565	0,03598	0,11830	0,02838	0,02864
7	0,23411	0,03535	0,03546	0,11708	0,02815	0,02823
10	0,23295	0,03519	0,03523	0,11655	0,02802	0,02805
∞	0,23192	0,03504	0,03504	0,11609	0,02790	0,02790

λ	$10 \cdot G_2^{(2)}$	$10^2 \cdot G_{21}^{(2)}$	$10^2 \cdot G_{22}^{(2)}$	$10 \cdot G_{12}^{(4)}$	$10^2 \cdot G_{21}^{(4)}$	$10^2 \cdot G_{22}^{(4)}$
0	0,25731	0,26599	0,05706	0,13409	0,20264	0,04562
0,05	0,26790	0,24033	0,05975	0,13941	0,18381	0,04775
0,2	0,30488	0,17412	0,06952	0,16781	0,13497	0,05542
0,5	0,41212	0,10167	0,10166	0,20951	0,08037	0,08036
1	0,76876	0,06147	0,26599	0,36502	0,05007	0,20264
3	0,14047	0,01993	0,02966	0,07414	0,01603	0,01588
5	0,07211	0,01204	0,01500	0,03822	0,00966	0,01206
7	0,04832	0,00859	0,01002	0,02563	0,00691	0,00806
10	0,03229	0,00602	0,00668	0,01714	0,00484	0,00547
∞	0	0	0	0	0	0