

Sonderdruck aus

Monatsberichte

der Deutschen Akademie der Wissenschaften
zu Berlin

Band 11 • Heft 3 • 1969



AKADEMIE-VERLAG • BERLIN

- [2] Vgl. TREDER, H.-J., Relativität und Kosmos. Berlin, Oxford und Braunschweig 1960.
- [3] TREDER, H.-J., Lorentz-Gruppe, Einstein-Gruppe und Raum-Struktur. In: H.-J. TREDER (ed), Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitationstheorie, Berlin 1966.
- [4] TREDER, H.-J., Annalen der Physik 20, 194 (1967), Mber. Dt. Akad. Wiss. Berlin 9, 427 (1967); Abstracts of 5. International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity, Tbilissi 1968, S. 280f.
- [5] TREDER, H.-J., Mathematische Nachrichten (im Druck), Mber. Dt. Akad. Wiss. Berlin 10, 471 (1968).
- [6] BORZESZKOWSKI, H. H. v., Annalen der Physik (im Druck); KASPER, U., Annalen der Physik 20, 265 (1967); KREISEL, E., Annalen der Physik (im Druck); LIEBSCHER, D.-E., Mber. Dt. Akad. Wiss. Berlin 9, 573 (1967).
- [7] LIEBSCHER, D. E., Abstracts of 5. International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity, Tbilissi 1968, S. 258f., International Journal of Theoretical Physics (im Druck).

Eingegangen: 18. Dezember 1968

Mathematik

J. SZLAŽA

Institut für angewandte Mathematik und Mechanik der Dt. Akad. Wiss.

Dreiphasenströmung durch ein Rohr mit elliptischem Querschnitt

Die Gleichungen für laminare Mehrphasenströmungen, in denen die relativen Geschwindigkeiten der einzelnen Phasen eine besondere Rolle spielen, sind von CH. A. RACHMATULIN [1] aufgestellt worden. Die Strömung jeder Phase wird als Strömung in einem sich bewegenden und verändernden porösen Medium betrachtet, das durch die übrigen Phasen gebildet wird. Mit Hilfe der Arbeit [1] können verschiedene Strömungen von Gemischen untersucht werden, die sowohl aus inkompressiblen als auch kompressiblen, sowohl aus idealen als auch zähen Medien bestehen. Hierbei kann die Anzahl der Phasen beliebig sein. Auf dem Gebiet der Mehrphasenströmungen in Rohren gibt es eine große Anzahl von Arbeiten. Dabei möchte ich besonders auf die Monographie von D. F. FAISULLAJEW [2] hinweisen. In ihr werden exakte Lösungen von laminaren Mehrphasenströmungen in Rohrleitungen angegeben. So unter anderem auch für den Fall der Zweiphasenströmung durch ein Rohr mit elliptischem Querschnitt. Befassen wir uns nun mit unserer Aufgabe.

1. Aufgabenstellung

Wir untersuchen die laminare stationäre Strömung eines inkompressiblen, zähen Dreiphasenmediums durch ein Rohr mit elliptischem Querschnitt. Der Wärmeaustausch wird nicht berücksichtigt. Die Strömung erfolge geradlinig und parallel zur Rohrachse Ox (Abb. 1). Der Rohrquerschnitt hat die Gleichung

$$(1) \quad \frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

wobei a und b die große und kleine Halbachse der Ellipse sind.

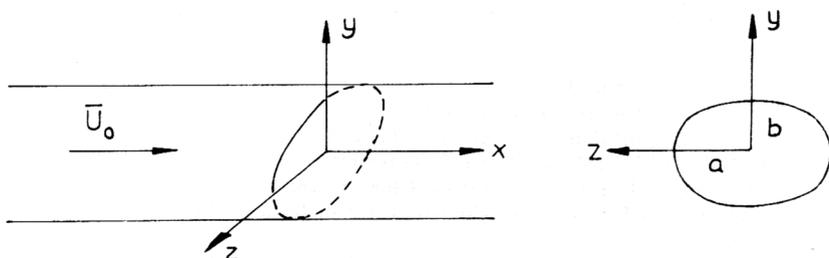


Abb. 1.

Da das Medium inkompressibel ist, sind die wirklichen Dichten der Phasen konstant, d. h.

$$\rho_i^* = \text{const.} \quad i = 1, 2, 3.$$

Setzen wir noch voraus, daß die reduzierten Dichten ebenfalls konstant sind, $\rho_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, 3$), dann sind auch die Porositäten der einzelnen Phasen konstant, d. h.

$$f_i = \frac{\rho_i}{\rho_i^*} = \text{const.} \quad i = 1, 2, 3.$$

Nach der Definition für die Porositäten [1] ist

$$(2) \quad f_1 + f_2 + f_3 = 1.$$

Da weiterhin die Strömung stationär ist und geradlinig und parallel zur Rohrachse Ox erfolgt, sind

$$(3) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \quad v_i = 0 \quad w_i = 0 \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei u_i, v_i, w_i die Geschwindigkeitskomponenten der einzelnen Phasen sind. Dann folgt aus der Kontinuitätsgleichung, daß

$$(4) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (3) und (4) erhalten wir nach [1] folgende Bewegungsgleichungen für die drei Phasen:

$$(5) \quad f_i \mu_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \right) + \sum_{j=1}^3 K_{ji} (u_j - u_i) = f_i \frac{\partial p}{\partial x} \quad i = 1, 2, 3.$$

Hier sind

- u_i — die Geschwindigkeiten der Phasen
- f_i — die Porositäten der Phasen
- μ_i — die Zähigkeitskoeffizienten der Phasen
- K_{ji} — der Wechselwirkungskoeffizient der j -ten Phase mit der i -ten Phase, wobei $K_{ji} = K_{ij}$
- p — der Druck.

In den Gleichungen (5) ist die linke Seite unabhängig von x , die rechte Seite aber ist eine Funktion von x . Eine solche Gleichung ist nur dann möglich, wenn die rechte Seite konstant ist, d. h.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = N = \text{const.}$$

Deshalb hat das Gleichungssystem (5) die Form

$$(6) \quad f_i \mu_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \right) + \sum_{j=1}^3 K_{ji} (u_j - u_i) = f_i N \quad i = 1, 2, 3.$$

Da alle drei Phasen als zähe Medien angesehen werden, erhalten wir in jedem Querschnitt des Kanals folgende Randbedingungen (Haftbedingungen)

$$(7) \quad u_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{auf der Ellipse (1).}$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, das Gleichungssystem (6)–(7) zu lösen. Gesucht sind also die Geschwindigkeiten und die Durchsätze der einzelnen Phasen.

2. Die Geschwindigkeiten der Phasen

Addieren wir in (6) die einzelnen Gleichungen und berücksichtigen dabei (2), dann erhalten wir

$$(7) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = N,$$

wobei

$$(8) \quad V = \sum_{i=1}^3 f_i \mu_i u_i.$$

Die Lösung der Gleichung (7), die der Randbedingung $V = 0$ auf der Ellipse genügt, ist

$$(9) \quad V = L \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 \right).$$

Setzen wir (9) in (7) ein, dann gelangen wir zu einem Ausdruck für L , wonach (9) die Form

$$(10) \quad V = \frac{N a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 \right)$$

annimmt. Berücksichtigen wir (8) und (10), dann hat die Geschwindigkeit der dritten Phase folgende Form

$$(11) \quad u_3 = -\frac{f_1 \mu_1}{f_3 \mu_3} u_1 - \frac{f_2 \mu_2}{f_3 \mu_3} u_2 + \frac{N a^2 b^2}{2 f_3 \mu_3 (a^2 + b^2)} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 \right).$$

Addieren wir nun in (6) die Gleichungen für die zweite und dritte Phase sowie die Gleichungen für die erste und dritte Phase und berücksichtigen (11),

dann gelangen wir zu dem Gleichungssystem

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - A u_1 + B u_2 = N \left\{ \frac{1}{\mu_1} - \frac{K_{13} a^2 b^2}{2 f_1 \mu_1 f_3 \mu_3 (a^2 + b^2)} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 \right) \right\} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - C u_2 + D u_1 = N \left\{ \frac{1}{\mu_2} - \frac{K_{23} a^2 b^2}{2 f_2 \mu_2 f_3 \mu_3 (a^2 + b^2)} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 \right) \right\}, \end{cases}$$

wobei

$$(13) \quad \begin{aligned} A &= \frac{K_{12} + K_{13}}{f_1 \mu_1} + \frac{K_{13}}{f_3 \mu_3} \\ B &= \frac{K_{12}}{f_1 \mu_1} - K_{13} \frac{f_2 \mu_2}{f_1 \mu_1 f_3 \mu_3} \\ C &= \frac{K_{12} + K_{23}}{f_2 \mu_2} + \frac{K_{23}}{f_3 \mu_3} \\ D &= \frac{K_{12}}{f_1 \mu_1} - K_{23} \frac{f_1 \mu_1}{f_2 \mu_2 f_3 \mu_3}. \end{aligned}$$

Aus dem Gleichungssystem (12) und den Randbedingungen $u_1 = u_2 = 0$ auf der Ellipse bestimmen wir nun die Geschwindigkeiten der Phasen u_1 und u_2 . Das Gleichungssystem (12) ist ein System von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir lösen dieses Gleichungssystem mit Hilfe der Methode von D'ALEMBERT. Wenn wir die erste Gleichung in (12) mit einer gewissen Zahl M multiplizieren und dann die erhaltene Gleichung mit der zweiten Gleichung addieren, gelangen wir zu der Beziehung

$$(14) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial y^2} (M u_1 + u_2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M u_1 + u_2) + (M B - C) \left[\frac{-M A + D}{M B - C} u_1 + u_2 \right] \\ &= N \left\{ M \left[\frac{1}{\mu_1} - \frac{K_{13} a^2 b^2}{2 f_1 \mu_1 f_3 \mu_3 (a^2 + b^2)} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{K_{23} a^2 b^2}{2 f_2 \mu_2 f_3 \mu_3 (a^2 + b^2)} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Wir wählen M so, daß die Gleichung

$$M = \frac{-M A + D}{M B - C}$$

erfüllt ist. Hieraus finden wir

$$(15) \quad M_{1,2} = \frac{(C - A) \pm \sqrt{(C - A)^2 + 4 B D}}{2 B}.$$

Die Gleichung (14) läßt sich dann wie folgt schreiben

$$(16) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - m^2 U = P - \frac{1}{2} Q y^2 - \frac{1}{2} R z^2.$$

Hier sind

$$\begin{aligned}
 U &= M u_1 + u_2 & m^2 &= C - MB \\
 P &= N \left(\frac{M}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + \frac{1}{2} a^2 b^2 S \\
 Q &= a^2 S & R &= b^2 S \\
 S &= \frac{N}{f_3 \mu_3 (a^2 + b^2)} \left(\frac{M K_{13}}{f_1 \mu_1} + \frac{K_{23}}{f_2 \mu_2} \right).
 \end{aligned}$$

Die Randbedingung für die Gleichung (16) ist: $U = 0$ auf der Ellipse. Die Lösung der Gleichung (16) suchen wir in der Form

$$(17) \quad U = U_1 + U_2,$$

wobei U_1 die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung und U_2 die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung sind.

Wie wir uns leicht überzeugen können, ist die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung gleich

$$(18) \quad U_1 = \frac{1}{m^2} \left\{ \frac{1}{2} (Q y^2 + R z^2) - \left(P - \frac{Q + R}{m^2} \right) \right\}.$$

Zur Bestimmung von U_2 haben wir die Gleichung

$$(19) \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} - m^2 U_2 = 0.$$

Gehen wir in dieser Gleichung zu elliptischen Koordinaten nach den Formeln

$$(20) \quad \begin{aligned} z &= h \operatorname{sh} \xi \sin \eta \\ y &= h \operatorname{ch} \xi \cos \eta \end{aligned}$$

über, wobei $h = \sqrt{b^2 - a^2}$, dann erhalten wir die Gleichung

$$(21) \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \eta^2} - \frac{h^2 m^2}{2} (ch 2\xi - \cos 2\eta) U_2 = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung suchen wir in der Form

$$(22) \quad U_2 = \varphi(\xi) \psi(\eta).$$

Setzen wir (22) in (21) ein, gelangen wir zu der Gleichung

$$(23) \quad \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - \frac{h^2 m^2}{2} ch 2\xi = - \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} - \frac{h^2 m^2}{2} \cos 2\eta.$$

Da die linke Seite von (23) unabhängig von η und die rechte Seite unabhängig von ξ ist, müssen beide Seiten gleich einer konstanten Größe λ sein.

Wir erhalten demzufolge zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - (\lambda + 2 \Theta ch 2\xi) \varphi &= 0 \\ \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} + (\lambda + 2 \Theta \cos 2\eta) \psi &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\Theta = + \frac{h^2 m^2}{4}$.

Die Gleichungen (24) sind die MATHIEUSCHEN Differentialgleichungen [2], [3], [4]. Ist Θ bekannt, dann bezeichnet man den Wert λ , für den eine periodische Lösung existiert, als Eigenwert, und die entsprechende periodische Lösung wird MATHIEUSCHE Funktion genannt. Die MATHIEUSCHEN Funktionen sind also die Eigenfunktionen des STURM-LIOUVILLESCHEN Randwertproblems für die Gleichungen (24). Hierbei sind $ce_n(\eta, \Theta)$, $se_n(\eta, \Theta)$ die geraden und ungeraden MATHIEUSCHEN Funktionen, die der zweiten Gleichung in (24) genügen, und $Ce_n(\xi, \Theta)$, $Se_n(\xi, \Theta)$ die geraden und ungeraden MATHIEUSCHEN Funktionen, die der ersten Gleichung in (24) genügen. Die entsprechenden Eigenwerte werden mit $a_n(\Theta)$ und $b_n(\Theta)$ bezeichnet.

Wir sehen also, daß U_2 aus dem Produkt zweier beliebiger MATHIEUSCHEN Funktionen besteht, die die Lösungen der Gleichungen (24) für ein und dieselben λ und Θ sind. Die Strömungsgeschwindigkeit ist in jedem Querschnitt bezüglich der großen und kleinen Achse der Ellipse symmetrisch verteilt. Diese Symmetrieeigenschaft der Strömung wird durch den Ausdruck der Form $Ce_{2n}(\xi, -\Theta) ce_{2n}(\eta, -\Theta)$ gewährleistet. Man kann zeigen, daß das auch die einzige Darstellungsweise für die Produkte von MATHIEUSCHEN Funktionen ist, die der Gleichung (21) genügt. Wir können also die Lösung der Gleichung (21) in der Form

$$(25) \quad U_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n Ce_{2n}(\xi, -\Theta) ce_{2n}(\eta, -\Theta)$$

schreiben. Hierbei sind C_n die Integrationskonstanten und [3]

$$ce_{2n}(\eta, -\Theta) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} \cos(2r\eta)$$

$$Ce_{2n}(\xi, -\Theta) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} \operatorname{ch}(2r\xi),$$

wobei $A_{2r}^{(2n)}$ konstante Zahlen sind, die von λ und Θ abhängig sind und sich nach folgenden rekurrenten Formeln bestimmen lassen:

$$2[A_0]^2 + \sum_{r=0}^{\infty} [A_{2r}]^2 = 1$$

$$\lambda A_0 - \Theta A_2 = 0$$

$$(\lambda - 4r^2) A_{2r} - \Theta (A_{2r-2} + A_{2r+2}) = 0, \quad \lambda = Q_{2n}(\Theta), \quad r = 2, 3, \dots$$

Zur Bestimmung von λ haben wir die transzendente Gleichung

$$\lambda = \frac{-\Theta^2/2}{1 - \frac{\lambda}{4} - \frac{\Theta^2/64}{1 - \frac{\lambda}{16} - \frac{\Theta^2/576}{1 - \frac{\lambda}{36} \dots}}} \quad \lambda = Q_{2n}(\Theta).$$

Unter Berücksichtigung von (18) und (25) hat die Lösung (17) der Gleichung (16) die Form

$$(26) \quad U = \frac{1}{m^2} \left\{ \frac{\hbar^2}{2} (Q \operatorname{ch}^2 \xi \cos^2 \eta + R \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta) - \left(P - \frac{Q+R}{m^2} \right) \right\} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} C_n C e_{2n}(\xi, -\Theta) c e_{2n}(\eta, -\Theta).$$

Indem wir auf der Ellipse $U = 0$ setzen, erhalten wir eine Beziehung zur Bestimmung der Konstanten C_n . Es ist

$$\frac{1}{m^2} \left\{ N \left(\frac{M}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) - \frac{Q+R}{m^2} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n C e_{2n}(\xi_0, -\Theta) c e_{2n}(\eta, -\Theta).$$

Wir multiplizieren beide Seiten dieses Ausdrucks mit $c e_{2p}(\eta, -\Theta)$ und integrieren über η von 0 bis 2π .

Infolge der Orthogonalitätseigenschaften der MATHIEUSCHEN Funktionen erhalten wir dann

$$\frac{1}{m^2} \left\{ N \left(\frac{M}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) - \frac{Q+R}{m^2} \right\} \int_0^{2\pi} c e_{2n}(\eta, -\Theta) d\eta \\ = C_n C e_{2n}(\xi_0, -\Theta) \int_0^{2\pi} c e_{2n}^2(\eta, -\Theta) d\eta.$$

Da aber [2]

$$\int_0^{2\pi} c e_{2n}(\eta, -\Theta) d\eta = (-1)^n 2\pi A_0^{(2n)} \\ \int_0^{2\pi} c e_{2n}^2(\eta, -\Theta) d\eta = \pi,$$

lassen sich die C_n nach der Formel

$$(27) \quad C_n = \frac{(-1)^n 2 A_0^{(2n)}}{m^2 C e_{2n}(\xi_0, -\Theta)} \left\{ N \left(\frac{M}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) - \frac{Q+R}{m^2} \right\}$$

bestimmen. Nach Einsetzen von (27) in (26) hat dann die Lösung der Gleichung (16) die Form

$$(28) \quad U = \frac{1}{m^2} \left\{ \frac{\hbar^2}{2} (Q \operatorname{ch}^2 \xi \cos^2 \eta + R \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta) - \left(P - \frac{Q+R}{m^2} \right) \right\} + \\ + 2 \left[N \left(\frac{M}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) - \frac{Q+R}{m^2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_0^{(2n)} \frac{C e_{2n}(\xi, -\Theta) c e_{2n}(\eta, -\Theta)}{C e_{2n} \left(\operatorname{arc} \operatorname{ch} \frac{b}{h}, -\Theta \right)} \Bigg\}.$$

Aus (28) lassen sich nun die Geschwindigkeiten der Phasen u_1 und u_2 bestimmen, indem wir in (28) M_1 und M_2 aus (15) einsetzen und dann das lineare algebraische Gleichungssystem

$$M_z u_1 + u_2 = \chi_z(\xi, \eta) \quad z = 1, 2,$$

wobei

$$(29) \quad \chi_{\kappa}(\xi, \eta) = \frac{1}{m_{\kappa}^2} \left\{ \frac{h^2}{2} (Q_{\kappa} ch^2 \xi \cos^2 \eta + R_{\kappa} sh^2 \xi \sin^2 \eta) - \left(P_{\kappa} - \frac{Q_{\kappa} + R_{\kappa}}{m_{\kappa}^2} \right) \right. \\ \left. + \left[2 N \left(\frac{M_{\kappa}}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) - \frac{Q_{\kappa} + R_{\kappa}}{m_{\kappa}^2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{0\kappa}^{(2n)} \frac{C e_{2n}(\xi, -\Theta_{\kappa}) c e_{2n}(\eta, -\Theta_{\kappa})}{C e_{2n}\left(\operatorname{arc} ch \frac{b}{h}, -\Theta_{\kappa}\right)} \right\}$$

nach u_1 und u_2 auflösen. Wir haben dann folgende Formeln für die Geschwindigkeiten der Phasen:

$$(30) \quad u_1 = \frac{\chi_2 - \chi_1}{M_2 - M_1}, \quad u_2 = \frac{M_2 \chi_1 - M_1 \chi_2}{M_2 - M_1}$$

und wegen (11)

$$(31) \quad u_3 = -\frac{f_1 \mu_1}{f_3 \mu_3} u_1 - \frac{f_2 \mu_2}{f_3 \mu_3} u_2 + \frac{N h^2 a^2 b^2}{2 f_3 \mu_3 (a^2 + b^2)} \left[\frac{ch^2 \xi \cos^2 \eta}{b^2} + \frac{sh^2 \xi \sin^2 \eta}{a^2} - 1 \right].$$

Betrachten wir den Übergang von einem Rohr mit elliptischem Querschnitt zu einem Rohr mit kreisförmigem Querschnitt, dann stellen wir fest, daß die Formeln (30) und (31) in die Formeln übergehen, die in [2] für die Geschwindigkeiten der Phasen bei einer Dreiphasenströmung durch eine Rohrleitung mit kreisförmigem Querschnitt erhalten wurden.

3. Die Durchsätze der Phasen

Die Durchsätze der Phasen lassen sich nach folgender Formel bestimmen

$$(32) \quad \Omega_i = f_i \iint_S u_i(\xi, \eta) ds \quad i = 1, 2, 3$$

oder

$$(33) \quad \Omega_i = \frac{h^2}{2} f_i \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \int_0^{2\pi} u_i(\xi, \eta) (ch 2\xi - \cos 2\eta) d\eta d\xi.$$

Durch Einsetzen von (30) und (31) in (33) gelangen wir zu folgenden Formeln für die Durchsätze der einzelnen Phasen:

$$(34) \quad \Omega_1 = \frac{1}{2} f_1 h^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{M_2 - M_1} \\ \Omega_2 = \frac{1}{2} f_2 h^2 \frac{M_2 \omega_1 - M_1 \omega_2}{M_2 - M_1} \\ \Omega_3 = - \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_3} \Omega_1 + \frac{\mu_2}{\mu_3} \Omega_2 + \frac{N a^3 b^3}{2 \mu_3 (a^2 + b^2)} \right\},$$

wobei

$$(35) \quad \omega_{\kappa} = \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \int_0^{2\pi} \chi_{\kappa}(\xi, \eta) (ch 2\xi - \cos 2\eta) d\eta d\xi \quad \kappa = 1, 2.$$

Setzen wir (29) in (35) ein, dann können wir ω_{κ} in zwei Integrale aufspalten

$$(36) \quad \omega_{\kappa} = \omega_{\kappa}^{(1)} + \omega_{\kappa}^{(2)},$$

wobei

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}^{(1)} &= \frac{1}{m_{\alpha}^2} \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{h^2}{2} (Q_{\alpha} \operatorname{ch}^2 \xi \cos^2 \eta + R_{\alpha} \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta) - \right. \\ &\quad \left. - \left(P_{\alpha} - \frac{Q_{\alpha} + R_{\alpha}}{m_{\alpha}^2} \right) \right\} (ch \, 2\xi - \cos 2\eta) \, d\eta \, d\xi \\ \omega_{\alpha}^{(2)} &= \frac{2}{m_{\alpha}^2} \left[N \left(\frac{M_{\alpha}}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) - \frac{Q_{\alpha} + R_{\alpha}}{m_{\alpha}^2} \right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A_{0\alpha}^{(2n)}}{C e_{2n}(\xi_0, -\Theta_{\alpha})} \times \\ &\quad \times \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \int_0^{2\pi} C e_{2n}(\xi, -\Theta_{\alpha}) c e_{2n}(\eta, -\Theta_{\alpha}) (ch \, 2\xi - \cos 2\eta) \, d\eta \, d\xi. \end{aligned}$$

Die Integrale $\omega_{\alpha}^{(1)}$ lassen sich leicht ausrechnen, und wir erhalten

$$(37) \quad \omega_{\alpha}^{(1)} = \frac{\pi a b}{m_{\alpha}^2 h^2} \left\{ Q_{\alpha} b^2 - 4 \left[N \left(\frac{M_{\alpha}}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) - \frac{Q_{\alpha} + R_{\alpha}}{m_{\alpha}^2} \right] \right\}.$$

Bezüglich der Berechnung der Integrale, die in die Formel für $\omega_{\alpha}^{(2)}$ eingehen, kann man in der Monographie [4] nachlesen. Nach der Integration erhalten wir für $\omega_{\alpha}^{(2)}$

$$(38) \quad \begin{aligned} \omega_{\alpha}^{(2)} &= \frac{2 \pi a b}{h^2 m_{\alpha}^2} \left[N \left(\frac{M_{\alpha}}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) - \frac{Q_{\alpha} + R_{\alpha}}{m_{\alpha}^2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A_{0\alpha}^{(2n)}}{C e_{2n} \left(\operatorname{arc} \operatorname{ch} \frac{b}{h} - \Theta_{\alpha} \right)} \left\{ 2 (A_{0\alpha}^{(2n)})^2 a b + \right. \\ &\quad + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \frac{h^2}{4} (A_{0\alpha}^{(2n)} A_{2r-2\alpha}^{(2n)} - A_{2\alpha}^{(2n)} A_{2r\alpha}^{(2n)} + \\ &\quad \left. + A_{0\alpha}^{(2n)} A_{2r+2\alpha}^{(2n)}) \operatorname{sh} 2r \left(\operatorname{arc} \operatorname{ch} \frac{b}{h} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir (37) und (38) in (36) und danach (36) in (34) ein, erhalten wir endgültig die Formeln für die Durchsätze der Phasen.

Die Struktur der Formeln für die Geschwindigkeiten und Durchsätze der Phasen ist recht kompliziert. Die in der vorliegenden Arbeit erhaltenen Formeln (30), (31) und (34) enthalten noch die unbestimmten Größen K_{12} , K_{13} , K_{23} , die die Wechselwirkungskoeffizienten zwischen den einzelnen Phasen darstellen. Die Bestimmung dieser Koeffizienten ist mit großen Schwierigkeiten verbunden. Rein theoretisch diese Koeffizienten zu bestimmen, ist eine sehr komplizierte Aufgabe aus dem Gebiet der theoretischen Physik. Hierbei ist es noch nicht gelungen, geeignete Modelle für die Prozesse der Wechselwirkung zwischen den Molekülen der verschiedenen Phasen zu entwickeln. Gegenwärtig gibt es eine gewisse Anzahl von halbempirischen Methoden zur Bestimmung der K_{ij} [2]. Dabei muß aber gesagt werden, daß diese Methoden noch bei weitem nicht ausreichen, um die in der Praxis auftretenden Probleme zu lösen. Es besteht also noch ein sehr akuter Bedarf an Methoden zur Bestimmung der K_{ij} . Dabei kommt man zur Zeit höchstwahrscheinlich ohne Experimente nicht aus.

Literaturverzeichnis

- [1] РАХМАТУЛИН, Х. А., Основы газодинамики взаимопроникающих движений, „Прикладная математика и механика“, т. 20, вып. 2, 1956.
- [2] ФАЙЗУЛЛАЕВ, Д. Ф., Ламинарное движение многофазных сред в трубопроводах. Ташкент, изд-во „ФАН“ Узб. ССРС, 1966.
- [3] Бейтмен, Г., и А. ЕРДЕЙИ, Высшие трансцендентные функции, Справочная математическая библиотека, Москва, Изд-во „Наука“, 1967.
- [4] ЛАХЛАН, МАК, Теория и приложения функций Матье, Москва, Иностранная литература, 1953.

Eingegangen: 14. November 1968

Astronomie und Astrophysik

H.-J. TREDER

Sternwarte Babelsberg, Institut für relativistische und extragalaktische Forschung, der Dt. Akad. Wiss.

Symmetrie und Kosmologie

Seit EDDINGTON ist wiederholt die Vermutung ausgesprochen worden, daß zwischen Kosmologie und Atomphysik enge Beziehungen bestehen, indem aus atomphysikalischen Beziehungen kosmologische Daten deduzierbar sind und umgekehrt. In der Tat liefert die Forderung der Selbstkonsistenz und globalen Gültigkeit der physikalischen Grundgesetze notwendige Bedingungen für die raum-zeitliche Topologie des Kosmos, wobei insbesondere bestimmte Klassen von Anfangs-, Rand- und Eindeutigkeitsbedingungen gefordert werden – ein Gesichtspunkt, den bereits EINSTEIN in seinen ersten Untersuchungen zur relativistischen Kosmologie hervorgehoben hat. Umgekehrt gibt die tatsächliche topologische Struktur des Kosmos bestimmte Anfangs- und Randbedingungen für die physikalischen Gesetze vor, und es ist zu erwarten, daß diese Vorgabe besonders für die weitreichenden Felder von Bedeutung werden [bzw. für Felder, deren Quanten die Ruhmasse Null haben (Photonen, Neutrinos, Gravitonen)]. Hierzu sind die Beziehungen von Gravitationstheorie und Kosmologie seit EINSTEIN ja evident.

HEISENBERG hat in der letzten Zeit verschiedentlich auf einen weiteren, komplementären Gesichtspunkt hingewiesen: Der aktuelle Kosmos ist nur einmal gegeben und ist daher *eine* Realisierung von einer unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Kosmen. – So lassen die EINSTEINSCHEN Gravitationsgleichungen eine Mannigfaltigkeit von kosmologischen Lösungen