

Sonderdruck aus

Monatsberichte

der Deutschen Akademie der Wissenschaften
zu Berlin

Band 13 · Heft 10–12 · 1971



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

Literaturverzeichnis

- [1] BERGER, M. S., A Sturm-Liouville theorem for nonlinear partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Pisa, Serie 3* 20, 543–582 (1966).
- [2] BROWDER, F. E., Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 71, 176–183 (1965).
- [3] —, Infinite dimensional manifolds and nonlinear elliptic eigenvalue problems. *Ann. of Math.* 82, 459–477 (1965).
- [4] —, Nonlinear eigenvalue problems and Galerkin approximation. *Bull. Amer. Math. Soc.* 74, 651–656 (1968).
- [5] CITLANADZE, E. S., Existenzsätze für Minimax-Punkte in Banach-Räumen und ihre Anwendung (russ.). *Arb. Mosk. Math. Ges.* 2, 235–274 (1953).
- [6] KRASNOSELSKIJ, M. A., Topologische Methoden in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen (russ.). GITTL, Moskau 1956.
- [7] PALAIS, R. S., Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds. *Topology* 5, 115–132 (1966).
- [8] VAJNBERG, M. M., Variationsmethoden zur Untersuchung nichtlinearer Operatoren (russ.). GITTL, Moskau 1956.

Eingegangen: 9. August 1971

J. SZLAŽA

Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der Dt. Akad. Wiss.

Ein asymptotisches Verfahren in der Superaerodynamik

Einleitung

In der Aerodynamik der verdünnten Gase oder, wie man auch noch sagt, der Superaerodynamik werden Probleme untersucht, die die Berücksichtigung der Molekularstruktur des Gases und die Anwendung kinetischer Gleichungen notwendig machen. Zu diesen Problemen gehören die Aufgaben der Umströmung von Flugkörpern in der Stratosphäre, der Bewegung von Gasen in Vakuumgeräten, der Ultraschallschwingungen in Gasen, der Struktur von Stoßwellen und Grenzschichten usw. Im Zusammenhang mit der Entwicklung der Raketentechnik besteht besonders großes Interesse für die Aufgaben der Hyperschallumströmung von Körpern beliebiger Form durch verdünntes Gas.

Ausgehend von dem kinetischen Gleichungssystem von S. W. WALLANDER [1] werden in der vorliegenden Arbeit Wege aufgezeigt, wie man an die analytische Lösung der letztgenannten Probleme herangehen kann. Zu Beginn wird die Verteilungsfunktion der Moleküle als Reihe nach Polynomen, die in beliebigen konischen Gebieten des Geschwindigkeitsraumes orthogonal sind, dargestellt. Für große MACH-Zahlen kann man diese Polynome asymptotisch konstruieren. Ferner wird das System der Integral-

momentengleichungen zur Bestimmung der Reihenoeffizienten a_m^\pm für die Verteilungsfunktion hergeleitet. Mit Hilfe des Iterationsverfahrens werden Formeln für die a_m^\pm in der ersten Näherung angegeben. Über diese Koeffizienten gelangt man schließlich zu allgemeinen Ausdrücken für die Gasparameter.

Es sei erwähnt, daß die Lösung der in der kinetischen Gastheorie auftretenden Gleichungen mit großen mathematischen Schwierigkeiten verbunden ist. Selbst die Lösung der kinetischen Gleichungen auf Rechenautomaten erweist sich als äußerst komplizierte Aufgabe. So müßte man z. B. im Falle des Gleichungssystems von S. W. WALLANDER mehrfache Integrale ausrechnen, wobei man es noch auf den Zwischentappen mit nichtlinearen Operationen zu tun hat und außerdem die Rechnungen im siebendimensionalen Raum $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, t$ durchgeführt werden müssen. Es ergibt sich somit die Frage: Mit welchen analytischen Methoden kann man, trotz der Kompliziertheit der Probleme, an die Lösung der oben genannten Aufgaben herangehen? Wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, kann man durch eine geeignete Kombination zwischen der Momentenmethode, des Iterationsverfahrens und der Asymptotik zur analytischen Lösung von Hyperschallströmungen in der Superaerodynamik gelangen. Das Wesentliche hierbei ist, daß durch die Verknüpfung der drei genannten Verfahren die Hyperschallprobleme auf die asymptotische Auswertung von mehrfachen Integralen zurückgeführt werden können. Die Schwierigkeit besteht aber darin, daß in Randnähe ungleichmäßige Asymptotik auftritt, die je nach Gestalt des Körpers unterschiedlich analysiert werden muß.

In dieser Richtung sind für das Grundmodell der Strömungsmechanik, der Umströmung einer Platte, schon Untersuchungen durchgeführt worden, die man in den Arbeiten [15–19] finden kann. In der vorliegenden Arbeit wird nun eine Verallgemeinerung auf Hyperschallumströmungen von Körpern beliebiger Form angegeben, indem ein Lösungsalgorithmus aufgezeigt wird, der zu allgemeinen Formeln für die Gasparameter in der ersten Näherung führt.

1. Die Verteilungsfunktion $f(\bar{r}, \bar{u})$

Bei der Beschreibung von Strömungen in der Superaerodynamik geht man im allgemeinen von den kinetischen Gleichungen der Gastheorie aus. Die bekannteste kinetische Gleichung zur Bestimmung der Verteilungsfunktion $f(t, \bar{r}, \bar{u})$ der Moleküle ist die BOLTZMANN-Gleichung. In unseren Überlegungen werden wir aber von den WALLANDERSCHEN Gleichungen [1] ausgehen, die im Unterschied zu der BOLTZMANN-Gleichung (diese ist eine Integro-Differentialgleichung) reine Integralgleichungen sind. Für unsere

asymptotischen Betrachtungen sind Integralgleichungen besser geeignet und bieten gute Ansatzpunkte für ihre analytische Lösung.

Die Umströmung eines Körpers durch ein verdünntes einatomiges Gas kann man also mit Hilfe des kinetischen Gleichungssystems von S. W. WALLANDER [1] beschreiben. Für den stationären Fall gilt

$$(1.1) \quad f(\bar{r}, \bar{u}) = \begin{cases} \frac{1}{u_n} \Phi(\bar{r}_s, \bar{u}) \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) + \int_0^{\tau_s} \Phi(\bar{r} - \tau \bar{u}, \bar{u}) \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau) d\tau & \bar{u} \in \Omega^+(\bar{r}) \\ \int_0^\infty \Phi(\bar{r} - \tau \bar{u}, \bar{u}) \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau) d\tau & \bar{u} \in \Omega^-(\bar{r}). \end{cases}$$

In (1.1) sind

- \bar{r} – der Radiusvektor des Raumpunktes (x, y, z)
- \bar{r}_s – der Radiusvektor des Punktes (x_s, y_s, z_s) auf der Oberfläche $F(\bar{r}_s) = 0$ des umströmten Körpers
- \bar{u} – die Geschwindigkeit der Moleküle
- τ_s – die Zeit der freien Bewegung der Moleküle
- τ – die Zeit der freien Bewegung der Moleküle von der Oberfläche des Körpers in den Punkt \bar{r} (die kleinste positive Wurzel der Gleichung $F(\bar{r} - \tau \bar{u}) = 0$)
- $f(\bar{r}, \bar{u})$ – die Verteilungsfunktion der Moleküle
- $\Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau)$ – die Wahrscheinlichkeit der freien Bewegung der Moleküle in den Punkt \bar{r} mit der Geschwindigkeit \bar{u} in der Zeit τ
- $\Phi(\bar{r}, \bar{u}, \tau)$ – innere „Erzeugungsfunktion“
- $\tilde{\Phi}(\bar{r}, \bar{u}, \tau)$ – Rand-„Erzeugungsfunktion“
- $n(\bar{r}_s)$ – die äußere Normale des Körpers im Punkt \bar{r}_s
- $\Omega^+(\bar{r})$ – der Kegel im Geschwindigkeitsraum, der alle Geschwindigkeiten \bar{u} enthält, mit denen die Moleküle in freier Bewegung vom Körper in den Punkt \bar{r} gelangen können
- $\Omega^-(\bar{r})$ – der Rest des Geschwindigkeitsraumes.

Alle Überlegungen, die in der vorliegenden Arbeit angestellt werden, können auf den instationären Fall übertragen werden.

Das Gleichungssystem (1.1) bestimmt die Verteilungsfunktion $f(\bar{r}, \bar{u})$, die eine Funktion von sechs Variablen ist. Es ist bekannt, daß mit Zunahme der Anzahl der Variablen die Schwierigkeiten bei der Lösung der kinetischen Gleichungen anwachsen. Andererseits ist die Mikrobeschreibung mit Hilfe der Verteilungsfunktion für die meisten Probleme zu detailliert. Deshalb ist es von Bedeutung, nach geeigneten Methoden zu suchen, die zur Ermittlung der Gasparameter führen, ohne daß die Verteilungsfunktion im einzelnen berechnet wird. Das effektivste Verfahren dabei ist die sogenannte Momentenmethode. Hierbei wird die Verteilungsfunktion f als Reihe nach orthogonalen Polynomen dargestellt, und mit Hilfe der BOLTZMANN-Gleichung oder (1.1) wird das Gleichungssystem zur Bestimmung der Reihenoeffizienten hergeleitet. Diese Koeffizienten geben uns dann die Möglichkeit, die Gasparameter zu bestimmen. Die Gestalt der Verteilungs-

funktion wird also von Anfang an vorgegeben. Bevor man aber zu der Momentenmethode greift, muß man davon überzeugt sein, daß die benutzte Verteilungsfunktion so gut wie möglich den betrachteten Prozeß widerspiegelt.

Betrachtet man ein verdünntes Gas im unbegrenzten Raum, so ist es vorteilhaft, die Verteilungsfunktion nach Polynomen, die im gesamten Geschwindigkeitsraum orthogonal sind, zu zerlegen [2, 3].

Nimmt man als Gewicht die MAXWELLSche Verteilungsfunktion

$$(1.2) \quad f_0 = n_0 \left(\frac{h_0}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \{ - h_0 (\bar{u} - \bar{U}_0)^2 \}$$

($h_0 = \frac{m}{2kT_0}$; n_0 , U_0 , T_0 bezeichnen die Dichte, die mittlere Geschwindigkeit und die Temperatur der ungestörten Strömung), so erweisen sich die

entsprechenden Polynome als HERMITESche Polynome, die Tensoren dritter Ordnung vom Rang m sind.

Die Verteilungsfunktion kann man nicht nur als Reihenentwicklung nach HERMITESchen Polynomen darstellen, sondern auch nach beliebigen anderen Funktionen. Die Wahl der einen oder anderen Form für die Verteilungsfunktion hängt vor allem von der Konvergenzgeschwindigkeit der entsprechenden Reihen ab. Für die meisten Probleme der Superaerodynamik erleidet die Verteilungsfunktion in jedem Punkt der Strömung bezüglich der Geschwindigkeit der Moleküle einen Sprung, der durch das unterschiedliche Verhalten der anströmenden und reflektierten Moleküle hervorgerufen wird. In diesem Fall konvergieren die Reihen nach HERMITESchen Polynomen sehr langsam. Diese Überlegung führt dazu, daß Verteilungsfunktionen betrachtet werden müssen, die dem Verhalten der anströmenden und reflektierten Moleküle Rechnung tragen.

Betrachtet man zum Beispiel die COUETTESche Strömung, dann ist es sinnvoll, die Verteilungsfunktion als Reihe nach Polynomen, die in der einen Hälfte des Geschwindigkeitsraumes orthogonal sind, darzustellen. Das ist dadurch bedingt, daß $f(\bar{r}, \bar{u})$ auf der Ebene $u_n = 0$ einen Sprung erleidet und deshalb für $u_n < 0$ und $u_n > 0$ [4, 5] erklärt werden muß. Die angeführten Darstellungen der Verteilungsfunktion gelten nur für einen sehr begrenzten Kreis von Aufgaben der Superaerodynamik. Im allgemeinen hat man es mit Problemen zu tun, bei denen die Verteilungsfunktion auf einer Kegelfläche einen Sprung besitzt, die den Geschwindigkeitsraum in zwei Unterräume $\Omega^+(\bar{r})$ und $\Omega^-(\bar{r})$ teilt. Das Gleichungssystem für $f(\bar{r}, \bar{u})$ hat dabei die Form (1.1). Da $f(\bar{r}, \bar{u})$ in den Räumen $\Omega^+(\bar{r})$ und $\Omega^-(\bar{r})$ eine unterschiedliche Gestalt annimmt, ist es günstiger, in diesen Räumen die approximierenden

Funktionen zu konstruieren, als im gesamten Geschwindigkeitsraum. Wir zerlegen also $f(\bar{r}, \bar{u})$ nach Polynomen $\Psi_m^\pm(\bar{r}, \bar{u})$, die mit dem Gewicht f_0 aus (1.2) in $\Omega^\pm(\bar{r})$ orthogonal sind. Im weiteren gehören alle mit „+“ bezeichneten Größen zum Geschwindigkeitsraum $\Omega^+(\bar{r})$ und die mit „-“ bezeichneten zum Raum $\Omega^-(\bar{r})$. Eine derartige Betrachtungsweise erlaubt, die Umströmung beliebiger Körper durch verdünntes Gas mathematisch zu modellieren.

Wir befassen uns nun mit der Konstruktion der Polynome $\Psi_m^\pm(\bar{r}, \bar{u})$. Wenn wir als Definition die Formel

$$(1.3) \quad (\alpha, \beta)^\pm = \frac{1}{\varepsilon^\pm} \iiint_{\Omega^\pm} f_0 \alpha \beta d\bar{u}$$

eingeführen, dann erhalten wir für die Orthonormierung der Polynome $\Psi_m^\pm(\bar{r}, \bar{u})$ folgende Bedingungen:

$$(1.4) \quad (\Psi_i, \Psi_j)^\pm = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Sind die Bedingungen (1.4) erfüllt, dann sagt man, daß die Polynome Ψ_m^\pm mit dem Gewicht f_0 aus (1.2) in Ω^\pm orthogonal und normiert sind. In (1.3) wird ε^\pm so gewählt, daß $\Psi_0^\pm = 1$ ist. Wir nehmen an, daß die Verteilungsfunktion f auf einer beliebigen Kegelfläche im Geschwindigkeitsraum einen Sprung erleidet. Hierbei zerfällt der Geschwindigkeitsraum in zwei Teile: Ω^+ und Ω^- . Bei der Umströmung mehrerer Körper zerfällt auch der Geschwindigkeitsraum in mehrere Teile. Da dies für unsere Überlegungen nicht ausschlaggebend ist, betrachten wir der Einfachheit halber nur die Umströmung eines Körpers.

Es seien

$$(1.5) \quad 1; u_i; u_i u_j; \dots; u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_m} = \{u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_m}\}$$

linear unabhängige Tensoren dritter Ordnung vom Rang m , wobei $i_m = 1, 2, 3; m = 0, 1, 2, \dots$ und u_{i_m} die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors sind. Aus (1.5) bilden wir die Folge $\{u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_m}\}_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m}$ die ebenfalls aus linear unabhängigen Elementen besteht. Die ersten Glieder dieser Folge sind

$$(1.6) \quad 1, u_x, u_y, u_z, u_x^2, u_y^2, u_z^2, u_x u_y, u_x u_z, u_y u_z, u_x^2 u_y, \\ u_y^3, u_z^2 u_y, u_x^3, u_x u_y^2, u_x u_z^2, u_x^2 u_z, u_y^2 u_z, u_z^3, u_x u_y u_z, \dots,$$

wobei x, y, z den Indizes 1, 2, 3 entsprechen. Wir numerieren die Elemente in (1.6) wie folgt

$$(1.7) \quad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots$$

und orthonormieren sie nach dem gewöhnlichen Schema [6]. Dabei erhalten wir die Folge $\{\Psi_i\}^\pm$ orthonormierter Polynome. Es sind

$$(1.8) \quad \Psi_m^\pm = \frac{\Theta_m^\pm}{\|\Theta_m\|^\pm}, \quad \Theta_m^\pm = \varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} C_{mk}^\pm \Psi_k^\pm, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

und

$$(1.9) \quad C_{mk}^\pm = (\varphi_m, \Psi_k)^\pm.$$

Da die Grenzen der Gebiete Ω^\pm von \bar{r} abhängen, sind die C_{mk}^\pm nach (1.3) Funktionen von \bar{r} . Demzufolge sind die erhaltenen Polynome Ψ_m^\pm Funktionen von \bar{r} und \bar{u} . Es sei angemerkt, daß die in [2–5] betrachteten Polynome nur Funktionen von \bar{u} sind. Aus (1.8) erhält man sukzessiv

$$(1.10) \quad \Psi_m^\pm = \frac{\Theta_m^\pm}{\|\Theta_m\|^\pm}, \quad \Theta_m^\pm = \varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} b_{mk}^\pm \varphi_k, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei

$$(1.11) \quad b_{mk}^\pm = \frac{C_{mk}^\pm}{\|\Theta_k\|^\pm} - \sum_{\substack{i=1 \\ i>k}}^{m-1} \frac{C_{mi}^\pm}{\|\Theta_i\|^\pm} b_{ik}^\pm$$

ist. Indem wir die Integrale

$$(1.12) \quad \alpha_{ij}^\pm = \iiint_{\Omega^\pm} f_0 \varphi_i \varphi_j d\bar{u} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

einführen, wobei f_0 und φ_i die Funktionen aus (1.2) und (1.7) sind und $\alpha_{ij}^\pm = \alpha_{ji}^\pm$ ist, und Ψ_k^\pm in (1.9) einsetzen, kann man C_{mk}^\pm sukzessiv nach α_{ij}^\pm ausdrücken. Wir erhalten

$$(1.13) \quad C_{mk}^\pm = \frac{1}{\varepsilon^\pm \|\Theta_k\|^\pm} \left\{ \alpha_{mk}^\pm - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{mi}^\pm b_{ik}^\pm \right\}.$$

Nach Einsetzen von (1.13) in (1.11) gelangen wir zu folgenden Ausdrücken für b_{mk}^\pm

$$(1.14) \quad b_{mk}^\pm = \frac{1}{\varepsilon^\pm \|\Theta_k\|^\pm} \left\{ \alpha_{mk}^\pm - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{mi}^\pm b_{ki}^\pm \right\} - \sum_{\substack{i=1 \\ i>k}}^{m-1} \frac{b_{ik}^\pm}{\varepsilon^\pm \|\Theta_i\|^\pm} \left\{ \alpha_{mi}^\pm - \sum_{l=0}^{m-1} \alpha_{ml}^\pm b_{il}^\pm \right\}.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß b_{mk}^\pm Funktionen von α_{ij}^\pm sind. Sind die b_{mk}^\pm bestimmt, so erhält man aus (1.10) auch Θ_m^\pm . Zur Konstruktion der Polynome Ψ_m^\pm müssen wir noch $\|\Theta_m\|^\pm$ ermitteln. Gemäß (1.3), (1.10) und (1.12) ist

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \|\Theta_m\|^\pm &= \frac{1}{\varepsilon^\pm} \iiint_{\Omega^\pm} f_0 \left[\varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} b_{mk}^\pm \varphi_k \right]^2 d\bar{u} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^\pm} \left\{ \alpha_{mm}^\pm - 2 \sum_{k=0}^{m-1} b_{mk}^\pm \alpha_{mk}^\pm + \sum_{i,k=0}^{m-1} b_{mi}^\pm b_{mk}^\pm \alpha_{ik}^\pm \right\}. \end{aligned}$$

Wie schon oben erwähnt, wird ε^\pm so gewählt, daß $\Psi_0^\pm = 1$ ist. Daraus folgt, daß $\varepsilon^\pm = \alpha_{00}^\pm$ ist. Die Polynome Ψ_m^\pm sind vollständig bestimmt, wenn wir die Integrale α_{ij}^\pm für $i \geq j$ nach (1.12) ausrechnen. Die dargelegte Konstruktion der Polynome Ψ_m^\pm ist für beliebige Gebiete im Geschwindigkeitsraum anwendbar. In den Gebieten Ω^\pm kann man schließlich die Verteilungsfunktion in folgender Form darstellen:

$$(1.16) \quad f^\pm(\bar{r}, \bar{u}) = f_0(\bar{u}) \sum_{m=0}^{\infty} a_m^\pm(\bar{r}) \Psi_m^\pm(\bar{r}, \bar{u}).$$

Im nächsten Punkt befassen wir uns mit der Berechnung der Integrale α_{ij}^\pm .

2. Die Asymptotik der Integrale α_{ij}^\pm für große Machzahlen

Ein Körper A beliebiger Form befinde sich in der ungestörten Strömung eines einatomigen verdünnten Gases mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{U}_0 . Das Koordinatensystem kann stets so gewählt werden, daß die Richtung des Geschwindigkeitsvektors \bar{U}_0 mit der positiven Richtung der Abszissenachse zusammenfällt (Abb. 1).

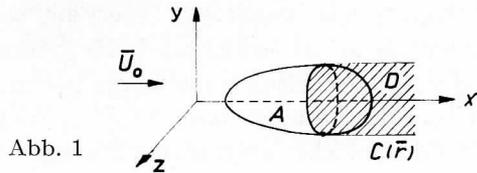


Abb. 1

Die Moleküle betrachten wir als elastische Kugeln und ihre Reflexion vom Körper sei diffus. Die Temperatur des Körpers soll sich nicht von der Temperatur des Gases unterscheiden.

Für die in der Arbeit vorkommenden dimensionslosen Größen nehmen wir folgende Bezugsgrößen an:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= U_0 \bar{u}', & \bar{r} &= \frac{\bar{r}'}{n_0 \sigma}, & \tau &= \frac{\tau'}{n_0 \sigma U_0}, & f &= n_0 U_0^{-3} f', \\ \bar{T} &= U_0^{-3} \bar{T}', & Q &= n_0 \sigma U_0 Q', & N &= n_0 U_0 N', \\ \Phi &= n_0^2 \sigma U_0^{-2} \Phi', & \tilde{\Phi} &= n_0 U_0^{-2} \tilde{\Phi}', & T &= U_0^{-3} T', \end{aligned}$$

wobei die mit Strich versehenen Größen dimensionslos sind. Weiterhin sind σ – der Stoßquerschnitt, \bar{T} – die Randtransformierte bei diffuser Reflexion, Q – die Stoßfunktion, N – die Anzahl der in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit des Körpers auftreffenden Partikel, T – die innere Transformierte.

Zur besseren Übersicht lassen wir bei den dimensionslosen Größen die Striche fort.

Für die Punkte außerhalb des Schattengebietes D des Körpers kann man die Verteilungsfunktion $f(\bar{r}, \bar{u})$ in der Form (1.16) darstellen. Die Polynome in (1.16) sind aus (1.10) bekannt, falls es gelingt, die Integrale α_{ij}^\pm zu lösen.

Das aber hängt von der Form des umströmten Körpers und deshalb von den Gebieten $\Omega^\pm(\bar{r})$ im Geschwindigkeitsraum ab (Abb. 2).

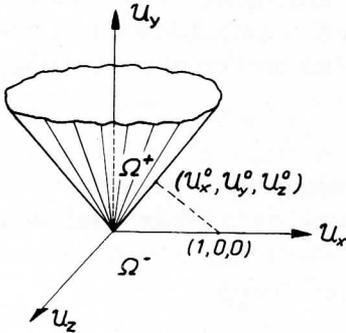


Abb. 2

Betrachten wir den gesamten Geschwindigkeitsraum, die Hälfte oder ein Viertel des Geschwindigkeitsraumes, dann lassen sich die Integrale α_{ij}^\pm exakt ausrechnen. Ist die Geometrie des umströmten Körpers so geartet, daß die Abhängigkeit der Gebiete Ω^\pm von \bar{r} sehr kompliziert ist, so können die Integrale nur numerisch berechnet werden. Eine analytische Lösung der Integrale α_{ij}^\pm ist jedoch auch für geometrisch komplizierte Körper möglich, falls Hyperschallumströmungen betrachtet werden. Die MAXWELLSche Verteilungsfunktion ist dann δ -förmig, und die α_{ij}^\pm können nach dem Parameter M (MACH-Zahl) asymptotisch ausgewertet werden. Diese asymptotischen Betrachtungen geben uns die Möglichkeit, viele Probleme der Superaerodynamik analytisch zu lösen.

Analysieren wir nun etwas näher die Schwierigkeiten, auf die wir bei der asymptotischen Abschätzung der α_{ij}^\pm stoßen. Die dimensionslose MAXWELLSche Verteilungsfunktion hat die Gestalt

$$(2.1) \quad f_0(\bar{u}, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2},$$

wobei

$$(2.2) \quad h = \frac{5}{6} M^2, \quad \bar{U}_0 = \{1, 0, 0\}$$

sind. Wegen (1.12) erhalten wir für α_{ij}^\pm

$$(2.3) \quad \alpha_{ij}^\pm(\bar{r}, h) = \iiint_{\Omega^\pm(\bar{r})} f_0 \varphi_i \varphi_j d\bar{u} = \iiint_{\Omega^\pm(\bar{r})} F_{ij} f_0 d\bar{u}.$$

Setzt man (2.1) in (2.3) ein, folgt

$$(2.4) \quad \alpha_{ij}^\pm(\bar{r}, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \iiint_{\Omega^\pm(\bar{r})} F_{ij}(\bar{u}) e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2} d\bar{u}.$$

Diese Integrale lassen sich für $h \rightarrow \infty$ asymptotisch abschätzen. Die Funktionen F_{ij} sind Potenzfunktionen bezüglich der Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \vec{u} . Aus (2.4) ist zu ersehen, daß sich das Maximum des Integranden im Punkt (1, 0, 0) des Geschwindigkeitsraumes befindet. Für das Gebiet Ω^- (Abb. 2) ist dieser Punkt ein innerer, für das Gebiet Ω^+ ein äußerer Punkt. Deshalb ist das asymptotische Verhalten von α_{ij}^+ für $h \rightarrow \infty$ exponentiell und von α_{ij}^- potentiell [7]. Falls die Maximumstelle des Integranden ein innerer Punkt des Integrationsgebietes ist (für die Integrale α_{ij}^-), lassen sich die Integrale recht einfach auswerten. Um die Asymptotik der α_{ij}^+ zu erhalten, ist es notwendig, das asymptotische Verhalten der Integrale in der Umgebung des Punktes (u_x^0, u_y^0, u_z^0) , der von allen Punkten aus Ω^+ den kürzesten Abstand zum Punkt (1, 0, 0) besitzt, zu untersuchen. Der Punkt (u_x^0, u_y^0, u_z^0) ist ein Randpunkt des Gebietes Ω^+ . Wenn die Oberfläche des Kegels Ω^+ den Punkt (1, 0, 0) enthält (das ist der Fall, wenn wir die Punkte auf der Oberfläche $C(\bar{r})$ im physikalischen Raum betrachten), dann wird das asymptotische Verhalten von α_{ij}^+ für $h \rightarrow \infty$ potentiell. Hieraus ist zu ersehen, daß die Asymptotik für die α_{ij}^+ in der Nähe der Oberfläche $C(\bar{r})$ ungleichmäßig ist. Demzufolge muß man bei der asymptotischen Betrachtung der Integrale α_{ij}^\pm zwei Fälle unterscheiden:

1. Das Maximum des Integranden ist ein innerer Punkt des Integrationsgebietes;
2. Das Maximum des Integranden ist für das Integrationsgebiet ein Randpunkt.

Die Methoden zur asymptotischen Abschätzung von mehrfachen Integralen sowohl im Fall 1, als auch für den Fall 2 bei verschiedenen Randpunkten, wurden hauptsächlich in den Arbeiten von L. C. HSU [8–10] entwickelt. Tritt bei der Umströmung von Körpern Symmetrie ein, sagen wir für u_z , dann lassen sich die Integrale α_{ij}^\pm nach u_z exakt berechnen, und es bleiben Doppelintegrale (Integration über u_x und u_y) übrig. Das asymptotische Verhalten von Doppelintegralen ist in den Arbeiten von J. FOCKE [11] und R. RIEDEL [12, 13] untersucht worden. Hier werden auch Randmaxima verschiedener Art betrachtet.

Bei der Berechnung der α_{ij}^\pm kann man auch auf die Arbeit von TICHONOW und SAMARSKIJ [14] zurückgreifen. Sie betrachten die Zerlegung von Integralen über δ -förmige Funktionen.

Man kann also sagen, daß es in der mathematischen Literatur eine große Anzahl von Arbeiten verschiedener Autoren gibt, die es uns ermöglichen, die Integrale α_{ij}^\pm für $h \rightarrow \infty$ asymptotisch auszuwerten. Deshalb gibt es bei der Berechnung der α_{ij}^\pm in der Hyperschallaerodynamik keine prinzipiellen Schwierigkeiten, und die Polynome Ψ_m^\pm können endgültig auf asymptotischem Wege konstruiert werden. Sind nun diese Polynome bekannt, so

können wir mit ihrer Hilfe Formeln für die Makroparameter des Gases, die sich durch die Reihenkoeffizienten $a_m^\pm(\bar{r})$ ausdrücken lassen, herleiten. Diesen Problemen wenden wir uns im nächsten Punkt zu.

3. Die Makroparameter des Gases

Wir können (1.10) wie folgt umformen:

$$(3.1) \quad \Psi_m^\pm = \sigma_m^\pm \varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^\pm \varphi_k \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Hier sind

$$(3.2) \quad \sigma_m^\pm = \frac{1}{\|\Theta_m\|^\pm}, \quad \delta_{mk}^\pm = \sigma_m^\pm b_{mk}^\pm,$$

wobei sich b_{mk}^\pm und $\|\Theta_m\|^\pm$ nach (1.14) und (1.15) bestimmen lassen. Wenn wir (1.16) in (1.1) einsetzen, entsprechend mit Ψ_m^+ und Ψ_m^- multiplizieren und über Ω^+ und Ω^- integrieren, dann erhalten wir infolge der orthonormierten Polynome Ψ_m^\pm ein unendliches System von Integralmomentengleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten a_m^\pm , nämlich

$$(3.3) \quad a_m^\pm(\bar{r}) = \iiint_{\Omega^\pm(\bar{r})} \Psi_m^\pm(\bar{r}, \bar{u}) V^\pm f^\pm d\bar{u} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Hier sind $V^\pm f^\pm$ die rechten Seiten der Gleichungen (1.1). Es sei

$$(3.4) \quad M_i^\pm(\bar{r}) = \iiint_{\Omega^\pm} \varphi_i f^\pm d\bar{u} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Multiplizieren wir nun (1.16) mit (3.1) und integrieren über Ω^\pm , dann erhalten wir folgende Ausdrücke

$$(3.5) \quad M_m^\pm = \frac{1}{\sigma_m^\pm} \left[a_m^\pm + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^\pm M_k^\pm \right] \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Hieraus ist zu ersehen, daß man M_m^\pm sukzessiv nach a_m^\pm ausdrücken kann. Wir führen noch die Bezeichnung

$$(3.6) \quad \{B\}^\pm = B^+ + B^-$$

ein, wobei B ein Skalar, Vektor oder Tensor sein kann.

Die wichtigsten Makroparameter des Gases n , \bar{U} , T , P , \bar{H} , d. h. die Dichte, mittlere Geschwindigkeit, Temperatur des Gases, der Spannungstensor und der Wärmestromvektor lassen sich nach folgenden Formeln [1] berechnen:

$$(3.7) \quad n = \iiint_{-\infty}^{\infty} f d\bar{u} = \{n\}^\pm,$$

wobei

$$n^+ = \iiint_{\Omega^+} f^+ d\bar{u}, \quad n^- = \iiint_{\Omega^-} f^- d\bar{u}$$

sind; und analog

$$(3.8) \quad n \bar{U} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{u} d\bar{u} = \{n \bar{U}\}^{\pm}$$

$$(3.9) \quad 3 n RT = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f (\bar{u} - \bar{U})^2 d\bar{u} = \{3 n RT\}^{\pm}$$

$$(3.10) \quad P_{ij} = m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f (u_i - U_i) (u_j - U_j) d\bar{u} = \{P_{ij}\}^{\pm}$$

$$(3.11) \quad \bar{H} = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f (\bar{u} - \bar{U})^2 (\bar{u} - \bar{U}) d\bar{u} = \{\bar{H}\}^{\pm},$$

wobei R die Gaskonstante ist und $i, j = 1, 2, 3$ den Indizes x, y, z entsprechen.

Gemäß (1.7), (3.4) und (3.5) können wir (3.7)–(3.11) nach M_i^{\pm} und deshalb auch nach a_m^{\pm} ausdrücken.

Wir erhalten

$$(3.12) \quad n = \{M_0\}^{\pm} = \{a_0\}^{\pm},$$

$$(3.13) \quad n \bar{U} = \{\bar{U}_1\}^{\pm},$$

wobei

$$\{U_{1x}\}^{\pm} = \{M_1\}^{\pm}, \quad \{U_{1y}\}^{\pm} = \{M_2\}^{\pm}, \quad \{U_{1z}\}^{\pm} = \{M_3\}^{\pm}$$

sind. Weiterhin gelten die Formeln

$$(3.14) \quad 3 n RT = \{M_4 + M_5 + M_6\}^{\pm} - n U^2$$

$$(3.15) \quad P_{ij} = m [\{P_{ij}^{(1)}\}^{\pm} - n U_i U_j], \quad P_{ij} = P_{ji},$$

wobei

$$\begin{aligned} \{P_{xx}^{(1)}\}^{\pm} &= \{M_4\}^{\pm}, & \{P_{xy}^{(1)}\}^{\pm} &= \{M_7\}^{\pm}, & \{P_{xz}^{(1)}\}^{\pm} &= \{M_8\}^{\pm} \\ \{P_{yy}^{(1)}\}^{\pm} &= \{M_5\}^{\pm}, & \{P_{yz}^{(1)}\}^{\pm} &= \{M_9\}^{\pm}, & \{P_{zz}^{(1)}\}^{\pm} &= \{M_6\}^{\pm} \end{aligned}$$

sind. Schließlich ist

$$(3.16) \quad \bar{H} = \frac{m}{2} [\{H_1\}^{\pm} - n \bar{U} (U^2 + 3 RT)] - \bar{U} P,$$

wobei

$$\begin{aligned} \{H_{1x}\}^{\pm} &= \{M_{13} + M_{14} + M_{15}\}^{\pm} \\ \{H_{1y}\}^{\pm} &= \{M_{10} + M_{11} + M_{12}\}^{\pm} \\ \{H_{1z}\}^{\pm} &= \{M_{16} + M_{17} + M_{18}\}^{\pm} \end{aligned}$$

sind. Wir drücken nun die Stoßfrequenz $N(\bar{r}_s)$ der Moleküle mit dem Körper (die Anzahl der in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit des Körpers auftreffenden Partikel) sowie den Impuls $\bar{p}(\bar{r}_s)$ und die Energie $E(\bar{r}_s)$, die von

den Molekülen dem Körper übertragen werden, nach den Koeffizienten a_m^\pm aus.

Die Stoßfrequenz im Punkte \bar{r}_s des Körpers ist nach [1]

$$(3.17) \quad N(\bar{r}_s) = - \int \int \int_{u_n < 0} f(\bar{r}_s, \bar{u}) u_n d\bar{u},$$

wobei

$$(3.18) \quad u_n = u_x \cos(\widehat{\bar{n}}, x) + u_y \cos(\widehat{\bar{n}}, y) + u_z \cos(\widehat{\bar{n}}, z)$$

gilt. Setzen wir (3.18) in (3.17) ein, so erhalten wir wegen (3.4) und (3.5)

$$(3.19) \quad N(\bar{r}_s) = - U_{1n}^-(\bar{r}_s),$$

wobei U_{1n}^- die Normalkomponente des Vektors \bar{U}_1^- aus (3.13) ist.

Der Impuls und die Energie, die von den Molekülen in der Zeiteinheit auf die den Punkt \bar{r}_s enthaltende Flächeneinheit des Körpers übertragen werden, lassen sich nach folgenden Formeln [1] berechnen

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{r}_s) &= \bar{p}^- - \bar{p}^+ \\ E(\bar{r}_s) &= E^- - E^+, \end{aligned}$$

wobei \bar{p}^- , E^- der Impuls und die Energie sind, die von den auf den Körper auftreffenden Molekülen mitgeführt werden, \bar{p}^+ und E^+ bezeichnen Impuls und Energie, die von den vom Körper reflektierten Molekülen mitgeführt werden. Die letzteren lassen sich mit Hilfe der Funktion $\Phi(\bar{r}_s, \bar{u})$, deren Ausdruck vom Reflexionsschema abhängt, bestimmen [1]. Wir betrachten hier nur die Berechnung von \bar{p}^- und E^- .

Es gilt [1]

$$(3.20) \quad \bar{p}^-(\bar{r}_s) = - m \int \int \int_{u_n < 0} f(\bar{r}_s, \bar{u}) u_n \bar{u} d\bar{u},$$

$$(3.21) \quad E^-(\bar{r}_s) = - \frac{m}{2} \int \int \int_{u_n < 0} f(\bar{r}_s, \bar{u}) u_n u^2 d\bar{u}.$$

Setzen wir (3.18) in (3.20) und (3.21) ein, dann erhalten wir infolge (3.4) und (3.5)

$$(3.22) \quad \bar{p}_i^-(\bar{r}_s) = - m P_{in}^{(1)-}(\bar{r}_s) \quad i = x, y, z,$$

$$(3.23) \quad E^-(\bar{r}_s) = - \frac{m}{2} H_{1n}^-(\bar{r}_s),$$

wobei $P_{in}^{(1)-}$ die Normalkomponente des Vektors $\bar{P}_i^{(1)-}$ ist, dessen Komponenten $P_{ix}^{(1)-}$, $P_{iy}^{(1)-}$, $P_{iz}^{(1)-}$ sich gemäß (3.15) bestimmen lassen, und H_{1n} die Normalkomponente des Vektors \bar{H}_1^- ist, dessen Komponenten man nach (3.16) berechnen kann.

Aus den Formeln (3.12)–(3.16), (3.19), (3.22) und (3.23) ist zu ersehen, daß die Makroparameter des Gases dann vollständig bestimmt sind, wenn wir

die Ausdrücke für die $\{M_i\}^\pm$ bzw. a_m^\pm gefunden haben. Die Koeffizienten a_m^\pm können aus dem System der Integralmomentengleichungen (3.3) mit Hilfe des Iterationsverfahrens ermittelt werden. Im nächsten Punkt bestimmen wir die a_m^\pm bzw. $\{M_i\}^\pm$ in der ersten Näherung.

4. Die erste Näherung für $\{M_i\}^\pm$

Laut (1.1) ist

$$(4.1) \quad f = \begin{cases} f^+ = V^+ f^+ & \text{für } \bar{u} \in \Omega^+ \\ f^- = V^- f^- & \text{für } \bar{u} \in \Omega^-, \end{cases}$$

wobei $V^\pm f^\pm$ die rechten Seiten in (1.1) sind. Für die Funktionen, die in die rechten Seiten von (4.1) eingehen, gelten folgende dimensionslose Ausdrücke [1]:

$$(4.2) \quad \Phi(\bar{r}_s, \bar{u}) = N(\bar{r}_s) \bar{T}(\bar{u}),$$

wobei $N(\bar{r}_s)$ sich nach (3.17) berechnen läßt und \bar{T} bei diffuser Reflexion die Gestalt

$$(4.3) \quad \bar{T} = \frac{2 h^2}{\pi} u_n e^{-hu^2}$$

besitzt;

$$(4.4) \quad \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau) = \exp \left\{ - \int_0^\tau Q(\bar{r} - q \bar{u}, \bar{u}) d\bar{u} \right\},$$

wobei

$$(4.5) \quad Q = \{Q\}^\pm$$

und

$$(4.6) \quad Q^\pm(\bar{r}, \bar{u}) = \iiint_{\Omega^\pm(\bar{r})} |\bar{u} - \bar{u}_1| f^\pm(\bar{r}, \bar{u}_1) d\bar{u}_1$$

sind.

Weiter ist

$$(4.7) \quad \Phi(\bar{r}, \bar{u}) = \Phi^{++}(\bar{r}, \bar{u}) + 2 \Phi^{+-}(\bar{r}, \bar{u}) + \Phi^{--}(\bar{r}, \bar{u}),$$

wobei

$$(4.8) \quad \Phi^{\varepsilon\Delta}(\bar{r}, \bar{u}) = \iiint_{\Omega^\varepsilon} \iiint_{\Omega^\Delta} |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| f^\varepsilon(\bar{r}, \bar{u}_1) f^\Delta(\bar{r}, \bar{u}_2) T(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}) d\bar{u}_1 d\bar{u}_2$$

und für elastische kugelförmige Moleküle

$$T(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}) = \frac{1}{\pi |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|^2} \delta \left\{ u - \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2} \mid - \frac{|\bar{u}_2 - \bar{u}_1|}{2} \right\}$$

sind. ε und Δ stehen an Stelle von „+“ oder „-“. In (4.7) charakterisiert Φ^{++} die Wechselwirkung der reflektierten Moleküle untereinander, Φ^{+-} die

Wechselwirkung der auf den Körper auftreffenden und reflektierten Partikel und Φ^- die Wechselwirkung der auftreffenden Teilchen untereinander. Setzen wir nun gemäß (1.16) die Verteilungsfunktion f^\pm in die Formeln (4.2) (4.8) ein, so erhalten wir für N, Q^\pm und $\Phi^{\varepsilon A}$:

$$(4.9) \quad N(\bar{r}_s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^-(\bar{r}_s) \tilde{\beta}_m^-(\bar{r}_s),$$

wobei

$$(4.10) \quad \tilde{\beta}_m^-(\bar{r}_s) = \sigma_m^-(\bar{r}_s) \beta_m^- - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^-(\bar{r}_s) \beta_k^-$$

und

$$(4.11) \quad \beta_m^- = - \int \int \int_{u_n < 0} u_n f_0 \varphi_m d\bar{u} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

sind;

$$(4.12) \quad Q^\pm(\bar{r}, \bar{u}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^\pm(\bar{r}) \tilde{A}_m^\pm(\bar{r}, \bar{u}),$$

wobei

$$(4.13) \quad \tilde{A}_m^\pm(\bar{r}, \bar{u}) = \sigma_m^\pm(\bar{r}) A_m^\pm(\bar{r}, \bar{u}) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^\pm(\bar{r}) A_k^\pm(\bar{r}, \bar{u})$$

und

$$(4.14) \quad A_m^\pm(\bar{r}, \bar{u}) = \int \int \int_{\Omega^\pm} |\bar{u} - \bar{u}_1| \varphi_m(\bar{u}_1) f_0(\bar{u}_1) d\bar{u}_1$$

sind.

Weiterhin ist

$$(4.15) \quad \Phi^{\varepsilon A}(\bar{r}, \bar{u}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i^\varepsilon(\bar{r}) a_j^A(\bar{r}) \tilde{B}_{ij}^{\varepsilon A}(\bar{r}, \bar{u}),$$

wobei

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \tilde{B}_{ij}^{\varepsilon A} &= \sigma_i^\varepsilon \sigma_j^A B_{ij}^{\varepsilon A} - \sigma_i^\varepsilon \sum_{k=0}^{j-1} \delta_{jk}^A B_{ik}^{\varepsilon A} \\ &\quad - \sigma_j^A \sum_{k=0}^{i-1} \delta_{ik}^\varepsilon B_{jk}^{\varepsilon A} + \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{j-1} \delta_{il}^\varepsilon \delta_{jk}^A B_{lk}^{\varepsilon A} \end{aligned}$$

und

$$(4.17) \quad \begin{aligned} B_{ij}^{\varepsilon A}(\bar{r}, \bar{u}) \\ = \int \int \int \int_{\Omega^\varepsilon} \int_{\Omega^A} \varphi_i(\bar{u}_1) \varphi_j(\bar{u}_2) |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| f_0(\bar{u}_1) f_0(\bar{u}_2) T(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}) d\bar{u}_1 d\bar{u}_2 \end{aligned}$$

sind.

Wie in 2. und 3. schon gezeigt wurde, lassen sich die σ_m^\pm und δ_{mk}^\pm in den Formeln (4.10), (4.13) und (4.16) gemäß (3.2), (1.14) und (1.15) durch die Integrale α_{ij}^\pm ausdrücken. Weiterhin können die Integrale β_m^- , A_m^\pm , $B_{ij}^{\varepsilon A}$ aus (4.11), (4.14) und (4.17) für $h \rightarrow \infty$ ebenfalls asymptotisch ausgewertet werden, da in den Integranden die MAXWELLSche Verteilungsfunktion f_0

eingeht. Die dreifachen Integrale β_m^- und A_m^\pm lassen sich verhältnismäßig leicht asymptotisch berechnen, während die asymptotische Abschätzung der sechsfachen Integrale B_{ij}^{eA} mit einigen Schwierigkeiten verbunden ist, da hier noch die durch T in den Integranden eingehende δ -Funktion eine wichtige Rolle spielt. Durch die δ -Funktion fällt eine Integration in den Integralen B_{ij}^{eA} fort. Die weitere Integration über eine fünfdimensionale Hyperfläche führt dann zu einigen Komplikationen, die geometrischer Natur sind und von der Form des umströmten Körpers abhängen. Prinzipiell kann man aber die Integrale β_m^- , A_m^\pm , B_{ij}^{eA} für $h \rightarrow \infty$ asymptotisch auswerten. Es sind nur noch die Koeffizienten a_m^\pm zu bilden. Wenden wir uns deshalb dem Gleichungssystem (3.3) zu. Für dieses System kann man das Iterationsverfahren zur Bestimmung der a_m^\pm nach folgendem Schema durchführen

$$(4.18) \quad a_m^{(n)\pm} = \iiint_{\Omega^\pm} \Psi_m^\pm V^\pm f_{n-1}^\pm d\bar{u} \quad n = 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei n die Nummer der Näherung ist.

Als nullte Näherung für die Verteilungsfunktion f betrachten wir die ungestörte Außenströmung, die durch die MAXWELLSche Verteilungsfunktion f_0 (2.1) charakterisiert wird. Das bedeutet, daß die Koeffizienten a_m^\pm in der nullten Näherung folgende Gestalt haben

$$(4.19) \quad a_0^{(0)-} = 1 \quad a_0^{(0)+} = 0 \quad a_k^{(0)\pm} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Setzt man nun diese Werte für die a_m^\pm in (4.9)–(4.17) ein, so erhält man für N , Q und Φ in der nullten Näherung

$$(4.20) \quad N^{(0)} = \beta_0^- \quad Q^{(0)} = A_0^- \quad \Phi^{(0)} = B_{00}^{--},$$

wobei β_0^- , A_0^- und B_{00}^{--} sich aus (4.11), (4.14) und (4.17) berechnen lassen. $\Phi^{(0)}$ läßt sich auch aus anderen Überlegungen bestimmen. Für die ungestörte Außenströmung gilt infolge des Gleichgewichtes

$$(4.21) \quad \Phi^{(0)} = Q^{(0)-} \cdot f_0 = Q^{(0)+} \cdot f_0 = A_0^- f_0.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß zur Bestimmung von $N^{(0)}$, $Q^{(0)}$ und $\Phi^{(0)}$ nur die Berechnung der dreifachen Integrale β_0^- und A_0^- notwendig ist. Für große MACH-Zahlen lassen sich diese Integrale asymptotisch abschätzen, für kleine oder gemäßigte M müssen die Integrale numerisch gelöst werden, sofern sie sich nicht exakt ermitteln lassen.

Gemäß (4.18) haben wir für a_m^\pm in der ersten Näherung

$$(4.22) \quad a_m^{(1)\pm} = \iiint_{\Omega^\pm} \Psi_m^\pm V^\pm f_0^\pm d\bar{u}.$$

Setzt man (4.20) und (4.21) unter Berücksichtigung von (4.2) und (4.4) in (4.1) ein, so erhält man für $V^\pm f_0^\pm$

$$(4.23) \quad V^- f_0^- = f_0 J_1(\bar{r}, \bar{u})$$

$$(4.24) \quad V^+ f_0^+ = f_0^* II(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) + f_0 J_2(\bar{r}, \bar{u}),$$

wobei

$$(4.25) \quad J_k(\bar{r}, \bar{u}) = \int_0^{\tau_k} A_0^-(\bar{r} - \tau \bar{u}, \bar{u}) \exp \left\{ - \int_0^\tau A_0^-(\bar{r} - q \bar{u}, \bar{u}) dq \right\} d\tau$$

$$k = 1, 2, \quad \tau_1 = \infty, \quad \tau_2 = \tau_s$$

$$(4.26) \quad f_0^* = \frac{1}{u_n} \beta_0^-(\bar{r}, \bar{u}) \bar{T}(\bar{u})$$

$$(4.27) \quad II(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) = \exp \left\{ - \int_0^{\tau_s} A_0^-(\bar{r} - q \bar{u}, \bar{u}) dq \right\}$$

sind.

Die Integrale (4.25) lassen sich leicht ausrechnen. Wir erhalten

$$(4.28) \quad J_k(\bar{r}, \bar{u}) = 1 - e^{-z_k(\bar{r}, \bar{u})} \quad k = 1, 2,$$

wobei $z_1 = \infty$ und $z_2 = \int_0^{\tau_s} A_0^-(\bar{r} - q \bar{u}, \bar{u}) dq$ sind. Setzt man (4.28) in (4.23)

und (4.24) ein, so erhält man

$$(4.29) \quad V^- f_0^- = f_0$$

$$(4.30) \quad V^+ f_0^+ = f_0 + II(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) [f_0^* - f_0]$$

und infolge (4.22)

$$(4.31) \quad a_m^{(1)-} = \iint_{\Omega^-} \Psi_m^- f_0 d\bar{u} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$(4.32) \quad a_m^{(1)+} = \hat{a}_m^{(1)+} + \tilde{a}_m^{(1)+},$$

wobei

$$(4.33) \quad \hat{a}_m^{(1)+} = \iint_{\Omega^+} \Psi_m^+ f_0^* II(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u}$$

$$(4.34) \quad \tilde{a}_m^{(1)+} = \iint_{\Omega^+} \Psi_m^+ f_0 [1 - II(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s)] d\bar{u}$$

sind.

Setzen wir nun (3.1) unter Berücksichtigung von (3.2), (1.14), (1.15) und (1.12) in (4.31)–(4.34) ein, so erhalten wir schließlich für die Koeffizienten $a_m^{(1)\pm}$

$$(4.35) \quad a_0^{(1)-} = \alpha_{00}^-, \quad a_k^{(1)-} = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$(4.36) \quad a_m^{(1)+} = \hat{a}_m^{(1)+} + \tilde{a}_m^{(1)+} \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei $\tilde{a}_m^{(1)+}$ sich nach (4.33) bestimmen lassen und

$$(4.37) \quad \tilde{a}_0^{(1)+} = \alpha_{00}^+ + \chi_0^+, \quad \tilde{a}_k^{(1)+} = \chi_k^+ \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

sind.

Hier ist

$$(4.38) \quad \chi_m^+ = - \int_{\Omega^+} \int \int \Psi_m^+ f_0 \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Mit Hilfe dieser Koeffizienten $a_m^{(1)\pm}$ können die Ausdrücke für die Gasparameter in der ersten Näherung gefunden werden. Wie aus 3. zu ersehen ist, lassen sich alle Makroparameter des Gases durch $\{M_{ij}\}^\pm$ ausdrücken. Nach Einsetzen von (4.35)–(4.38) in (3.5) unter Berücksichtigung von (3.1), (3.2) und (1.11) erhalten wir für die $\{M_{ij}\}^\pm$ in der ersten Näherung

$$(4.39) \quad \{M_{ij}^{(1)}\}^\pm = \{\alpha_{i0}\}^\pm + \gamma_i^+ + \eta_i^+ \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei

$$(4.40) \quad \alpha_{i0}^\pm = \int_{\Omega^+} \int \int f_0 \varphi_i d\bar{u}$$

$$(4.41) \quad \gamma_i^+ = - \int_{\Omega^+} \int \int \varphi_i f_0 \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u}$$

$$(4.42) \quad \eta_i^+ = \int_{\Omega^+} \int \int \varphi_i f_0^* \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) d\bar{u}$$

sind und $\varphi_i, f_0, f_0^*, \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s)$ sich nach (1.7), (2.1), (4.26) und (4.27) bestimmen lassen. Die Gasparameter sind also endgültig in der ersten Näherung bestimmt, wenn wir die Integrale (4.40)–(4.42) ausrechnen. Für $h \rightarrow \infty$ lassen sich diese Integrale asymptotisch auswerten. Dabei ist zu bemerken, daß in Randnähe ungleichmäßige Asymptotik auftritt. Das ungleichmäßige asymptotische Verhalten der Makroparameter des Gases in Randnähe wird vor allen Dingen bei der Abschätzung der Integrale η_i^+ aus (4.42) aufgedeckt. Bei Betrachtung der $\{M_{ij}\}^\pm$ in der ersten Näherung können schon Aussagen über das asymptotische Verhalten der Gasparameter in der Grenzschicht gemacht werden. Das Verhalten der Gasparameter auf dem Körper, z. B. ihre Abhängigkeit von \bar{r}_s , läßt sich mit der ersten Näherung noch nicht darstellen. Hierzu wird die zweite Näherung benötigt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß Probleme der Hyperschallaerodynamik der verdünnten Gase durch rationelle Anwendung folgender drei Methoden analytisch gelöst werden können:

1. Momentenmethode, die zur Aufstellung des Systems (3.3) führt
2. Iterationsverfahren nach (4.18)
3. Asymptotik aller auftretenden Integrale nach dem Parameter M .

Der Erfolg hierbei hängt davon ab, wie wir es verstehen, die auftretenden Integrale (4.40)–(4.42) asymptotisch auszuwerten. Das wiederum hängt von der Form des betrachteten Körpers ab.

Interessant und wichtig für die Praxis sind Probleme der Hyperschallumströmung von Körpern endlichen Ausmaßes und der Hyperschallströmungen in Kanälen. Hierbei tritt neben dem Parameter M noch ein zweiter Parameter $Kn = \frac{l}{L}$ (Knudsenzahl) auf, wobei l die mittlere freie Weglänge und L die charakteristische Länge des Körpers sind. An die Lösung dieser Probleme kann man ebenfalls mit dem beschriebenen asymptotischen Verfahren herangehen. Die Untersuchungen werden dabei aber weitaus komplizierter, da neben der Grenzschicht auch Stoßwellen auftreten können und außerdem bei der asymptotischen Auswertung der Integrale zwei Parameter eine Rolle spielen. Hierbei können mehrere Gebiete ungleichmäßiger Asymptotik auftreten, deren Struktur in Abhängigkeit von M und Kn recht kompliziert sein kann.

Literaturverzeichnis

- [1] „Аэродинамика разреженных газов“ сб. 1, под ред. С. В. Валландера, изд. ЛГУ, 1963.
- [2] GRAD, H., Comm. Pure and Appl. Math. 2, Nr. 4 (1949).
- [3] „Аэродинамика разреженных газов“ сб. 2, под ред. С. В. Валландера, изд. ЛГУ, 1964.
- [4] GROSS, E., E. A. JACKSON und S. ZIERING, Ann. Phys. 1, 141 (1957).
- [5] „Аэродинамика разреженных газов“ сб. 3, под ред. С. В. Валландера, изд. ЛГУ, 1965.
- [6] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. V, М., 1959.
- [7] Евграфов, М. А., Асимптотические оценки и целые функции, М., ГИФМЛ, 1962.
- [8] Hsu, L. C., A theorem on the asymptotic behavior of a multiple integral. Duke Math. Jour., Vol. 15, N 3, 1948.
- [9] Hsu, L. C., Approximations to a class of double integrals of functions of large numbers. Amer. Jour. of Math., Vol. 70, N 4, 1948.
- [10] Hsu, L. C., On a kind of asymptotic integrals with integrands having absolute maximum at boundary points. Acta Math. Sinica. Vol. 4, N 3, 1954.
- [11] Focke, J., Asymptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationären Phase. Berichte über die Verhandlungen der Sächs. Akad. der Wissensch. zu Leipzig. Math.-naturwiss. Klasse, Band 101, Heft 3, Akademie-Verlag, 1954.
- [12] RIEDEL, R., Asymptotische Darstellungen von Doppelintegralen. Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-naturw. Reihe 14 (1965).
- [13] RIEDEL, R., Asymptotische Darstellungen von Doppelintegralen mit nichtstationären Randmaxima. Math. Nachrichten, Bd. 30, N 5/6, 1965.
- [14] Тихонов, Самарский, Асимптотическое разложение интегралов от пикообразных функций, Н. Д. В. Ш. физ.-мат. науки, N 1, 1959.
- [15] Р. Г. Баранцев, Ю. Шлажа, Вестник ЛГУ, N 19, 1964.
- [16] SZLAŻA, J., ZAMM, Bd. 45, N. 2/3, 1965.
- [17] SZLAŻA, J., Mber. Dt. Akad. Wiss. zu Berlin, Bd. 8, Heft 2, 1966.
- [18] Шлажа, Ю. Вестник ЛГУ, N 13, 1967.
- [19] Шлажа, Ю. Вестник ЛГУ, N 1, 1968.

Eingegangen: 2. November 1971