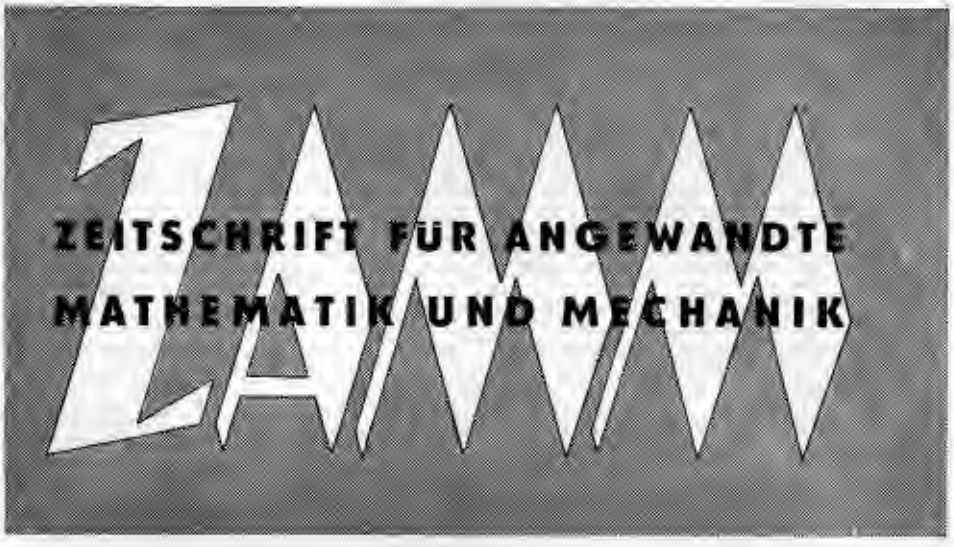

Sonderdruck aus

Band 45, Heft 2/3, 1965

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

V/12/6

and therefore

$$\Phi^{\mathrm{I}} = 4\,A\,z = \frac{4\,A\,k\,c\,\mu\,\nu}{i}. \tag{41}$$

Proceeding as in the case $k < 1$, we get

$$\begin{cases} A = \dfrac{\tau\,k^2\,c_{66}}{4} \cdot \dfrac{Q_2'(\nu_0) - \nu_0\,Q_2''(\nu_0)}{G\,Q_2'(\nu_0) - k^2\,c_{66}\,\nu_0\,Q_2''(\nu_0)}, \\ B_2 = \dfrac{\tau\,k\,\nu_0}{4} \cdot \dfrac{k^2\,c_{66} - G}{G\,Q_2'(\nu_0) - k^2\,c_{66}\,\nu_0\,Q_2''(\nu_0)}, \end{cases} \tag{42}$$

where $\nu_0 = i \operatorname{Sinh} \alpha$.

The results of CHAKRAVORTY [1] and CHATTARJI [2] for $k > 1$ can be deduced in this case also.

Stress

The stress component on the surface of the inclusion $\varrho = a$ is given by

$$\widehat{\varrho\theta} = \frac{G}{r^2}\frac{\partial \Psi^{\mathrm{I}}}{\partial s} = 2\,A\,G\,a \operatorname{Sin} 2\varphi\,, \tag{43}$$

where s is measured along a meridian arc on the surface of the inclusion.

Clearly the numerically greatest value of $\widehat{\varrho\theta}|_{\varrho=a}$ is

$$|\widehat{\varrho\theta}| = 2\,a|A\,G|\,, \tag{44}$$

where

$$|A\,G| = \frac{\tau\,k^2\,c_{66}\,G}{4}\left|\frac{Q_2'(\nu_0) - \nu_0\,Q_2''(\nu_0)}{G\,Q_2'(\nu_0) - k^2\,c_{66}\,\nu_0\,Q_2''(\nu_0)}\right| \text{(Elastic inclusion)}$$

$$= \frac{\tau\,k^2\,c_{66}}{4}\left|1 - \frac{\nu_0\,Q_2''(\nu_0)}{Q_2'(\nu_0)}\right| \text{(Rigid inclusion)}$$

$$= 0\,, \quad \text{(cavity)}$$

and

$$\nu_0 = \operatorname{Cosh}\alpha\,, \quad \text{if } k < 1$$
$$= i \operatorname{Sinh}\alpha\,, \quad \text{if } k > 1\,.$$

Acknowledgment

I wish to thank Dr. P. P. CHATTARJI of Calcutta University for his kind advice in the preparation of this paper.

References

1 J. G. CHAKRAVORTY, Jour. Asson. App. Phys. 4, p. 13 (1957).
2 P. P. CHATTARJI, Jour. Asson. App. Phys. 4, p. 10 (1958).

Anschrift: SUBHAS CH. BOSE, Mandhari Bazar, Kanchrapara, 24 Parganas, West-Bengal, India.

JURGIS SZLAŽA

Zur asymptotischen Struktur der Grenzschicht am vorderen Ende einer halbunendlichen Platte für große Machzahlen

Die aerodynamische Grenzschicht hat asymptotischen Charakter und ist ein typisches Beispiel für ungleichmäßige Asymptotik. Der Erforschung ihrer Besonderheiten sind viele Arbeiten gewidmet, die sich teils auf Makro-, teils auf Mikrovorstellungen stützen. Da die Möglichkeiten der phänomenologischen Untersuchung der Grenzschicht beschränkt und die Gleichungen der kinetischen Gastheorie für die Bewegung in Randnähe äußerst kompliziert sind, sind noch viele Probleme ungelöst, insbesondere was die Bildung der Grenzschicht an der Plattennase angeht.

Wie bereits in [2] festgestellt wurde, muß bei der Untersuchung der Grenzschicht im verdünnten Gas das ungleichmäßige asymptotische Verhalten der Makroparameter des Gases analysiert werden. Zu Beginn wird in der vorliegenden Arbeit ein Näherungsausdruck für die Verteilungsfunktion der von der Wand reflektierten Partikel hergeleitet, der offenbar die wesentlichsten Besonderheiten der Strömung in Randnähe für große MACHzahlen M der ungestörten Außenströmung beschreibt. Weiterhin werden für den Fall der Längsumströmung einer halbunendlichen Platte vom kinetischen Standpunkt aus die Struktur der ungleichmäßigen Asymptotik, die Art des asymptotischen Verhaltens einiger Makrogrößen, die die Dichte und mittlere Geschwindigkeit der Strömung der betrachteten Partikel ergeben, in der Nähe der Plattennase für große MACHzahlen untersucht.

1. Die Verteilungsfunktion der reflektierten Partikel

Eine Platte ($y = 0$, $x \geqq 0$) befinde sich in der ungestörten Strömung eines einatomigen verdünnten Gases, dessen mittlere Geschwindigkeit $\boldsymbol{U}_0 = \{1, 0, 0\}$ betragen soll. Die Reflexion der Moleküle von der Wand sei diffus. Die Moleküle betrachten wir als elastische Kugeln. Die Temperatur der Platte soll sich nicht von der Temperatur des Gases unterscheiden.

Für die in der Arbeit vorkommenden dimensionslosen Größen nehmen wir folgende Bezugsgrößen an:

$$\boldsymbol{u} = U_0\,\boldsymbol{u}'\,, \quad \boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}'}{n_0\,\sigma}\,, \quad \tau = \frac{\tau'}{n_0\,\sigma\,U_0}\,, \quad f = n_0\,U_0^{-3}\,f'\,,$$

$$\tilde{T} = U_0^{-3}\,\tilde{T}'\,, \quad Q = n_0\,\sigma\,U_0\,Q'\,, \quad N = n_0\,U_0\,N'\,,$$

wobei die mit Strich versehenen Größen dimensionslos sind. Weiterhin sind n_0, $\boldsymbol{U}_0$ — die Dichte und die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung, σ — der Stoßquerschnitt, $\boldsymbol{u}$ — die Geschwindigkeit der Moleküle, $\boldsymbol{r}$ — der Radiusvektor des Punktes (x, y, z), τ — die Zeit, f — die Verteilungsfunktion, $\tilde{T}$ — die Randtransformierte bei diffuser Reflexion, Q — die Stoßfunktion, N — die Anzahl der in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit auftreffenden Partikel.

Zur besseren Übersicht schreiben wir im folgenden die dimensionslosen Größen ohne Strich.

Die Strömung außerhalb der Grenzschicht wird durch die MAXWELLsche Verteilungsfunktion

$$f_0(\boldsymbol{u}, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \exp\{-h\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_0)^2\} \tag{1}$$

charakterisiert ($h = 5\,M^2/6$).

Die Anzahl der in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der Wand auftreffenden Partikel

$$N_0 = \int\limits_{u_y < 0}\int\int |u_y|\,f_0\,d\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\,h}} \tag{2}$$

strebt für $h \to \infty$ gegen Null. Im Grenzfall verschwindet die Grenzschicht, sofern keine Emission auftritt. Deshalb wird die Verteilung der auftreffenden Partikel für große h wenig gestört, und als erste Näherung nehmen wir an, daß ihre Anzahl durch (2) bestimmt wird. Die Verteilungsfunktion der reflektierten Moleküle hat dann an der Wand die Form

$$f_s = \frac{1}{u_y}\,N_0\,\tilde{T} = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h\,u^2}\,, \tag{3}$$

wobei $\tilde{T} = (2/\pi)\,h^2\,u_y\,e^{-h\,u^2}$ die sogenannte Randtransformierte bei diffuser Reflexion [1], [3] ist. Die Zahl dieser Moleküle nimmt mit der Entfernung von der Wand infolge der Zusammenstöße zwischen den Molekülen ab. Deshalb genügt es, in der ersten Näherung nur die Zusammenstöße mit den Partikeln der Grundströmung (1) zu betrachten. Die Stoßfunktion lautet dann [1]:

$$Q_0(\boldsymbol{u}, h) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1|\,f_0(\boldsymbol{u}_1, h)\,d\boldsymbol{u}_1\,.$$

Nach der Integration erhalten wir für die Stoßfunktion

$$Q_0(\boldsymbol{u}, h) = \frac{1}{\sqrt{\pi\,h}}\left\{e^{-h\,v^2} + \frac{1}{2\,v}\sqrt{\frac{\pi}{h}}\,(1 + 2\,h\,v^2)\operatorname{erf}\sqrt{h}\,v\right\}, \tag{4}$$

wobei $v = |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_0|$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül in freier Bewegung mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ von der Oberfläche der Platte in den Punkt $\boldsymbol{r}$ des Raumes gelangt, hat folgenden Ausdruck [1]

$$\Pi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}, \tau_s) = \exp\left\{-\int_0^{\tau_s} Q_0(\boldsymbol{u}, h)\, dq\right\}, \tag{5}$$

wobei τ_s die Zeit der freien Bewegung des Moleküls von der Platte in den Punkt $\boldsymbol{r}$ ist. τ_s ist die kleinste positive Wurzel der Gleichung $F(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}\,\tau_s) = 0$ ($F(\boldsymbol{r}_s) = 0$ — Gleichung der Oberfläche des umströmten Körpers). Für den Fall der Längsumströmung einer Platte gilt $\tau_s = y/u_y$. Bei der Ableitung der Formel (5) wurde als Längeneinheit der reziproke Wert des Produktes aus dem Stoßquerschnitt σ und der Dichte n_0 der ungestörten Strömung angenommen. Sie besitzt die Größenordnung der freien Weglänge.

Setzt man (4) in (5) ein und geht zum Grenzwert über für $h \to \infty$, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit der freien Bewegung des Moleküls von der Platte folgenden Ausdruck

$$\Pi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}) = \exp\left\{-\frac{y}{u_y}\,|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_0|\right\}. \tag{6}$$

Die Verteilungsfunktion der von der Wand reflektierten Partikel hat deshalb für große M angenähert die Form

$$f_s(y, \boldsymbol{u}, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left\{-h\,u^2 - \frac{y}{u_y}\,|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_0|\right\}. \tag{7}$$

2. Bestimmung der Makroparameter

Wir untersuchen jetzt das asymptotische Verhalten der Makroparameter der Strömung (1) für $h \to \infty$, $y \geqq 0$. Für die Konzentration der Moleküle gilt

$$n(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int\int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u}\,.$$

Die Dichte der reflektierten Moleküle für den Fall einer halbunendlichen Platte hat den Ausdruck

$$n_s(x, y, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{x}{y}u_y} \exp\left\{-h\,u^2 - \frac{y}{u_y}|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_0|\right\} \times du_x\, du_y\, du_z\,. \tag{8}$$

Die Integrale über u_x und u_z schätzen wir für $h \to \infty$ nach Laplace ab und erhalten

$$n_s = \frac{1}{2}\,n_s^* + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{\pi}}\int_0^{\infty} \exp\left\{-h\,u_y^2 - \frac{y}{u_y}\sqrt{1 + u_y^2}\right\} \times \operatorname{erf}\left(\sqrt{h}\,\frac{x}{y}\,u_y\right) du_y\,, \tag{9}$$

wobei n_s^* die Konzentration der von der Wand reflektierten Moleküle im Falle einer unendlichen Platte [2] ist:

$$n_s^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}} \left\{1 + o\left(\alpha^{-2/3}\right)\right\}, & \alpha \to \infty\,, \\ & \alpha = \sqrt{h}\,y\,. \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,\alpha \ln \alpha + o(\alpha)\,, & \alpha \to 0\,, \end{cases} \tag{10}$$

In der Umgebung von $y = 0$ ist das asymptotische Verhalten von (9) ungleichmäßig. Zur Untersuchung dieser Ungleichmäßigkeit führen wir in (9) folgende Koordinatentransformation durch

$$t = \sqrt{h}\,u_y\,. \tag{11}$$

Dann ist

$$n_s = \frac{1}{2}\,(n_s^* + \tilde{n}_s)\,, \tag{12}$$

wobei

$$\tilde{n}_s = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} \operatorname{erf}\beta\, t\, dt \tag{13}$$

und

$$\beta = \frac{x}{y}\,. \tag{14}$$

$\tilde{n}_s$ ist eine Funktion der Parameter α und β. Die weitere asymptotische Untersuchung von (13) erfolgt nach dem Parameter α, der für große h in Abhängigkeit von $y \geqq 0$ beliebige nichtnegative Werte annehmen kann.

Betrachten wir jetzt (13) für große und kleine α. Bei dieser Untersuchung benutzen wir die in [4] dargelegten asymptotischen Methoden. α möge gegen ∞ streben. Nach der Koordinatentransformation

$$t = \alpha^{1/3}\,\xi \tag{15}$$

erhalten wir für (13) folgenden Ausdruck:

$$\tilde{n}_s = \frac{\alpha^{1/3}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\alpha^{2/3}\left(\xi^2 + \frac{1}{\xi}\right)} \operatorname{erf}\left(\beta\,\alpha^{1/3}\,\xi\right) d\xi\,. \tag{16}$$

Dieses Integral läßt sich für $\alpha \to \infty$ nach Laplace abschätzen. Die Abschätzung ergibt

$$\tilde{n}_s = n_s^* \operatorname{erf}\left\{\beta\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/3}\right\}, \tag{17}$$

wobei man n_s^* aus (10) erhält.

Im Ergebnis erhalten wir für n_s

$$n_s = \frac{1}{2\sqrt{3}}\, e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}} \left\{1 + \operatorname{erf}\left[\beta\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/3}\right]\right\} \times \left\{1 + o\left(\alpha^{-2/3}\right)\right\}, \quad \alpha \to \infty\,. \tag{18}$$

Bei $\alpha \to 0$ wenden wir auf (13) die Laplacetransformation an. Das führt zu dem Ausdruck

$$L(\tilde{n}_s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\mu\alpha}\int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{\alpha}{t}} \operatorname{erf}\beta\, t\, dt\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} e^{-t^2} \operatorname{erf}\beta\, t\, dt - \frac{1}{\mu^2}\int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2} \operatorname{erf}\beta\, t}{t + \frac{1}{\mu}}\, dt\right\}. \tag{19}$$

Nach der Umkehrung hat das zweite Glied in (19) die Größenordnung $o(\alpha)$ für $\beta \to 0$ und $o(\alpha \ln \alpha)$ für $\beta \to \infty$.

Für $\tilde{n}_s$ erhalten wir dann näherungsweise

$$\tilde{n}_s = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\beta + o(\alpha \ln \alpha)\,. \tag{20}$$

Setzt man (20) in (12) ein und berücksichtigt dabei die Formel für n_s^* aus (10), so ergibt sich für n_s der Ausdruck

$$n_s = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\beta\right) + o(\alpha \ln \alpha), \quad \alpha \to 0\,. \tag{21}$$

Ist jedoch $y = o(M^{-1})$, so muß (12) numerisch gelöst werden. Ähnliche Überlegungen lassen sich in Hinblick auf die asymptotische Untersuchung der anderen Makroparameter anstellen.

Für die mittlere Geschwindigkeit der Strömung erhalten wir:

(22)
$$U_{sy} = \frac{1}{n_s}\left\{\frac{1}{2}\, n_s^*\, U_{sy}^* + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,h}\int_0^\infty t\, e^{-t^2-\frac{\alpha}{t}}\,\operatorname{erf}\beta t\, dt\right\},$$

und infolge [2]

(23)
$$n_s^*\, U_{sy}^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}\,h}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{1/3} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}}\{1+o(\alpha^{-2/3})\} \\ \qquad\qquad \alpha\to\infty, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\,h}\{1-\sqrt{\pi}\,\alpha-\alpha^2\ln\alpha+o(\alpha^2)\}, \\ \qquad\qquad \alpha\to 0, \end{cases}$$

ist

(24)
$$U_{sy} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n_s\sqrt{3}\,h}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{1/3} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}}\left\{1+\operatorname{erf}\left[\beta\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{1/3}\right]\right\} \\ \times\{1+o(\alpha^{-2/3})\}, \qquad \alpha\to\infty, \\ \dfrac{1}{4n_s\sqrt{\pi}\,h}\left\{1+\dfrac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}-\alpha\sqrt{\pi}\left(1+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\beta\right)\right. \\ \qquad \left.+\,o(\alpha^2\ln\alpha)\right\}, \quad \alpha\to 0. \end{cases}$$

Weiterhin ist

(25)
$$U_{sx} = \frac{1}{n_s}\left\{\frac{1}{2}\, n_s^*\, U_{sx}^* + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{h}\int_0^\infty \frac{1}{t}\, e^{-t^2-\frac{\alpha}{t}}\operatorname{erf}\beta t\, dt\right\},$$

und infolge [2]

(26)
$$n_s^*\, U_{sx}^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}\,h}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2/3} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}}\{1+o(\alpha^{-2/3})\}, \\ \qquad\qquad \alpha\to\infty, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\,h}\,\alpha\left\{\ln\alpha+\dfrac{3}{2}\,C+o(\alpha)\right\}, \\ \qquad\qquad \alpha\to 0, \end{cases}$$

(C — Eulersche Konstante)

gilt

(27)
$$U_{sx} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n_s\sqrt{3}\,h}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2/3} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}}\left\{1+\operatorname{erf}\left[\beta\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{1/3}\right]\right\} \\ \times\{1+o(\alpha^{-2/3})\}, \quad \alpha\to\infty, \\ \dfrac{\alpha}{4\sqrt{\pi}\,h\,n_s}\left\{\ln\dfrac{\beta+\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha}-\dfrac{3}{2}\,C+o(\alpha)\right\}, \\ \qquad\qquad \alpha\to 0,\ 0\leqq\beta<\infty. \end{cases}$$

Als Grenzschicht bezeichnen wir eine unendlich dünne Schicht, deren Dicke in unserem Fall umgekehrt proportional zu M ist, was aus dem Übergangsbereich von einer Asymptotik zur anderen ersichtlich ist. Die innere Struktur der Grenzschicht wird durch die Integrale (12), (22) und (25) charakterisiert.

In der Umgebung der Vorderkante der Platte hängen die asymptotischen Formeln für die Makrogrößen wesentlich vom zweiten Parameter β ab. Dieser Parameter charakterisiert die Abhängigkeit der asymptotischen Ausdrücke von dem Winkel zwischen der Platte und dem Strahl, auf dem sich die Moleküle bewegen, die an der Vorderkante der Platte reflektiert wurden. Für $\beta\to\infty$ gehen die Formeln (18), (21), (24) in die asymptotischen Ausdrücke (10), (23) über, die für den Fall einer unendlichen Platte erhalten wurden.

Literatur

1 С. В. Валландер, Новые кинетические уравнения в теории одноатомных газов, ДАН СССР, т. 131, №1 (1960).

2 Р. Г. Баранцев, Ю. Шлажа, К асимптотической структуре пограничного слоя при больших M, вестник ЛГУ, 1964, № 19.

3 Аэродинамика разреженных газов, Сб. 1, ред. С. В. Валландер, Издательство ЛГУ, 1963.

4 M. Abramowitz, Evaluation of the integral $\int_0^\infty e^{-u^2-\frac{x}{u}}\,du$, Jour. of Math. and Phys. **32**, 188 (1953).

Anschrift: J. Szlaža, Zerbst, Wallgrund 10

M. Rytel

Über Oszillatoren, die dieselbe Abhängigkeit der Schwingungsperiode von der Energie besitzen

Wir betrachten einen eindimensionalen Oszillator mit der Potentialfunktion $U(q)$. Mit E bezeichnen wir die ganze Energie des Oszillators und mit a und b seine beiden Extremalausschläge

$$U(a) = U(b) = E.$$

Dann lauten die Formeln für die Bewegungszeiten an beiden Zweigen der Kurve ([1], S. 208, Formeln (42.2))

(1)
$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_a^0 \frac{dq}{\sqrt{E-U(q)}}, \\ \tau_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^b \frac{dq}{\sqrt{E-U(q)}}. \end{cases}$$

Wenn wir $U(q)$ umkehren, erhalten wir

$$q(U)\begin{cases} q_1(U) < 0 \\ q_2(U) > 0. \end{cases}$$

Durch Transformation der Veränderlichen in (1) ergibt sich

(2)
$$\begin{cases} \tau_1(E) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^E \frac{\frac{dq_1}{dU}}{\sqrt{E-U}}\,dU, \\ \tau_2(E) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^E \frac{\frac{dq_2}{dU}}{\sqrt{E-U}}\,dU. \end{cases}$$

Wir berechnen die ganze Schwingungsperiode:

(3)
$$T(E) = 2(\tau_1+\tau_2) = 2\sqrt{2}\int_0^E \frac{\frac{d\left(\frac{q_2-q_1}{2}\right)}{dU}}{\sqrt{E-U}}\,dU.$$

Setzen wir

(4)
$$\frac{q_2-q_1}{2} = |q'|$$

so können wir sagen, daß alle Potentialfunktionen, die dieselbe Abhängigkeit $q'(U)$ haben, auch dieselbe Abhängigkeit $T(E)$ besitzen.