MONATSBERICHTE
DER DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN
Mitteilungen aus Mathematik, Naturwissenschaft, Medizin und Technik
BAND 8 1966 HEFT 2

I. Originalarbeiten

Mathematik

J. SZLAŽA

Institut für angewandte Mathematik und Mechanik der Dt. Akad. Wiss., Forschungsgemeinschaft

Hyperschallumströmung einer unendlichen Platte durch verdünntes Gas

Eine Platte $y = 0$ befinde sich in der ungestörten Strömung eines einatomigen verdünnten Gases, dessen mittlere dimensionslose Geschwindigkeit $\bar{U}_0 = \{1, 0, 0\}$ betragen soll. Die Reflexion der Moleküle von der Wand sei diffus. Die Moleküle betrachten wir als elastische Kugeln. Die Temperatur der Platte soll sich nicht von der Temperatur des Gases unterscheiden. Gesucht sind die asymptotischen Ausdrücke für die Makroparameter des Gases für große MACH-Zahlen M. Bei der Lösung dieses Problems gehen wir nach den in [1] dargelegten Methoden vor und bestimmen die Gasparameter in der ersten Näherung.

1. Die Verteilungsfunktion $f^{\pm}(\bar{r}, \bar{u})$ der Moleküle und die Polynome $\Psi_m^{\pm}$

Die Umströmung eines Körpers durch ein verdünntes Gas läßt sich mit Hilfe des kinetischen Gleichungssystems von S. W. WALLANDER [2] darstellen, das im stationären Fall die dimensionslose Form hat

$$(1.1)\quad f(\bar{r}, \bar{u}) = \begin{cases} \dfrac{1}{u_n} \Phi(\bar{r}_s, \bar{u})\, \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) + \displaystyle\int_0^{\tau_s} \Phi(\bar{r} - \tau \bar{u}, \bar{u})\, \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau)\, d\bar{r} & \bar{u} \in \Omega^+(\bar{r}) \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \Phi(\bar{r} - \tau \bar{u}, \bar{u})\, \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau)\, d\tau & \bar{u} \in \Omega^-(\bar{r}), \end{cases}$$

wobei

$$(1.2)\qquad \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau) = \exp\{-\int_0^{\tau} Q(\bar{r} - q\,\bar{u}, \bar{u})\, dq\}$$

und

$$Q(\bar{r}, \bar{u}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} |\bar{u} - \bar{u}_1| f(\bar{r}, \bar{u}_1)\, d\bar{u}_1 \tag{1.3}$$

$$\Phi(\bar{r}, \bar{u}) = \iiiiiint_{-\infty}^{\infty} |\bar{u}_1 - \bar{u}_2| \cdot f(\bar{r}, \bar{u}_1) f(\bar{r}, \bar{u}_2)\, T(\bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2)\, d\bar{u}_1 d\bar{u}_2 \tag{1.4}$$

und für elastische kugelförmige Moleküle

$$T(\bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = \frac{1}{\pi\, |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|^2}\, \delta\left\{\left|\bar{u} - \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2}\right| - \frac{|\bar{u}_2 - \bar{u}_1|}{2}\right\} \tag{1.5}$$

$$\tilde{\Phi}(\bar{r}_s, \bar{u}) = N(\bar{r}_s)\, \tilde{T}(\bar{u}) \tag{1.6}$$

und bei diffuser Reflexion

$$N(\bar{r}_s) = - \iiint_{u_n<0} f(\bar{r}_s, \bar{u})\, u_n\, d\bar{u} \tag{1.7}$$

$$\tilde{T}(\bar{u}) = \frac{2}{\pi} h^2 u_n\, e^{-hu^2}; \quad h = \frac{5}{6} M^2. \tag{1.8}$$

Weiter sind

- $\bar{r}$ – der Radiusvektor des Raumpunktes (x, y, z)
- $\bar{r}_s$ – der Radiusvektor des Punktes (x_s, y_s, z_s) auf der Oberfläche des umströmten Körpers
- $\bar{u}$ – die Geschwindigkeit der Moleküle
- $\bar{n}(\bar{r}_s)$ – die äußere Normale des Körpers im Punkte $\bar{r}_s$
- τ – die Zeit der freien Bewegung der Moleküle
- τ_s – die Zeit der freien Bewegung der Moleküle vom Körper in den Punkt $\bar{r}$
- Ω^+ – der Kegel im Geschwindigkeitsraum, der alle Geschwindigkeiten $\bar{u}$ enthält, mit denen die Moleküle in freier Bewegung vom Körper in den Punkt $\bar{r}$ gelangen können
- Ω^- – der Rest des Geschwindigkeitsraumes

Für den Fall einer unendlichen Platte gilt: $\tau_s = \frac{y}{u_y}$ und $u_n = u_y$. Ferner bezeichnen Ω^+ das Gebiet $u_y > 0$ und Ω^- das Gebiet $u_y < 0$ des Geschwindigkeitsraumes. Alle in der Arbeit vorkommenden Größen sind dimensionslos. Einen Hinweis auf die Bezugsgrößen finden wir in [1].
Im folgenden gehören alle mit „+" versehenen Größen zum Geschwindigkeitsraum Ω^+ und alle mit „–" bezeichneten zum Raum Ω^-.
Da die Verteilungsfunktion auf der Fläche $u_y = 0$ einen Sprung erleidet, kann man sie für die Gebiete $u_y < 0$ und $u_y > 0$ wie folgt definieren [1]

$$f^{\pm}(\bar{r}, \bar{u}) = f_0(\bar{u}) \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{\pm}(\bar{r})\, \Psi_m^{\pm}(\bar{r}, \bar{u})\,. \tag{1.9}$$

Hier sind

$$f_0(\bar{u}) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2} \tag{1.10}$$

die MAXWELLsche Verteilungsfunktion, $a_m^{\pm}$ – die Reihenkoeffizienten und $\Psi_m^{\pm}$ – die Polynome, die mit dem Gewicht f_0 aus (1.10) in $\Omega^{\pm}$ orthonormiert sind. Die Polynome $\Psi_m^{\pm}$ lassen sich nach folgendem Schema konstruieren

$$\Psi_m^{\pm} = \sigma_m^{\pm}\varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1}\delta_{mk}^{\pm}\varphi_k \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.11}$$

wobei $\{\varphi_m\}$ die Folge linear unabhängiger Tensoren $\{u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_m}\}_{i_1\leqq i_2\leqq\cdots\leqq i_m}$ ($i_m = 1, 2, 3$; $m = 0, 1, 2, \ldots$; u_{i_m} – die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\bar{u}$ und die Indizes 1, 2, 3 entsprechen den Indizes x, y, z) dritter Ordnung vom Rang m ist und

$$\sigma_m^{\pm} = \frac{1}{\|\Theta_m\|^{\pm}}, \qquad \delta_{mk}^{\pm} = \sigma_m^{\pm} b_{mk}^{\pm} \tag{1.12}$$

$$b_{mk}^{\pm} = \frac{1}{\alpha_{00}^{\pm}}\left\{d_{mk}^{\pm} - \sum_{\substack{i=1\\ i>k}}^{m-1} b_{ik}^{\pm} d_{mi}^{\pm}\right\} \tag{1.13}$$

$$d_{mk}^{\pm} = \frac{1}{\|\Theta_k\|^{\pm 2}}\left\{\alpha_{mk}^{\pm} - \sum_{i=0}^{k-1}\alpha_{mi}^{\pm} b_{ki}^{\pm}\right\} \tag{1.14}$$

$$\|\Theta_m\|^{\pm 2} = \frac{1}{\alpha_{00}^{\pm}}\left\{\alpha_{mm}^{\pm} - 2\sum_{k=0}^{m-1} b_{mk}^{\pm}\alpha_{mk}^{\pm} + \sum_{i,\,k=0}^{m-1} b_{mi}^{\pm} b_{mk}^{\pm}\alpha_{ik}^{\pm}\right\} \tag{1.15}$$

$$\alpha_{ij}^{\pm} = \iiint\limits_{\Omega^{\pm}} f_0\,\varphi_i\,\varphi_j\,d\bar{u} \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots \quad \alpha_{ij}^{\pm} = \alpha_{ji}^{\pm}. \tag{1.16}$$

Alle in (1.11)–(1.15) angeführten Größen erhält man sukzessiv. Wie aus (1.11)–(1.15) zu ersehen ist, sind die Polynome $\Psi_m^{\pm}$ endgültig bestimmt, wenn wir die $\alpha_{ij}^{\pm}$ ermitteln. Im Falle einer unendlichen Platte lassen sich diese Integrale exakt ausrechnen. Diese Werte fassen wir für $i, j = 0, \ldots, 6$ in der Tabelle 1 zusammen. Sind die $\alpha_{ij}^{\pm}$ bekannt, so können wir die $\sigma_m^{\pm}$ und $b_{mk}^{\pm}$ ($m = 0, \ldots, 6$) bestimmen (Tabelle 2). Die ersten Polynome ($m = 0, \ldots, 6$) haben die Form

$$\begin{aligned}
\Psi_0^{\pm} &= 1\\
\Psi_1^{\pm} &= \sqrt{2h}\,\{u_x - 1\}\\
\Psi_2^{\pm} &= \sqrt{\frac{2\pi h}{\pi-2}}\left\{u_y - \left(\pm\sqrt{\frac{1}{h\pi}}\right)\right\}\\
\Psi_3^{\pm} &= \sqrt{2h}\,u_z\\
\Psi_4^{\pm} &= \sqrt{2}\,h\left\{u_x^2 - 2u_x - \left(\frac{1}{2h} - 1\right)\right\}\\
\Psi_5^{\pm} &= h\sqrt{\frac{2(\pi-2)}{\pi-3}}\left\{u_y^2 - \left(\pm\frac{\pi}{\pi-2}\sqrt{\frac{1}{h\pi}}\right)u_y - \frac{1}{2h}\,\frac{\pi-4}{\pi-2}\right\}\\
\Psi_6^{\pm} &= \sqrt{2}\,h\left\{u_z^2 - \frac{1}{2h}\right\}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Tabelle 1

$\alpha_{00}^{\pm}=\frac{1}{2}$						
$\alpha_{10}^{\pm}=\frac{1}{2}$	$\alpha_{11}^{\pm}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2h}\right)$					
$\alpha_{20}^{\pm}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{h\pi}}$	$\alpha_{21}^{\pm}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{h\pi}}$	$\alpha_{22}^{\pm}=\frac{1}{4h}$				
$\alpha_{30}^{\pm}=0$	$\alpha_{31}^{\pm}=0$	$\alpha_{32}^{\pm}=0$	$\alpha_{33}^{\pm}=\frac{1}{4h}$			
$\alpha_{40}^{\pm}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2h}\right)$	$\alpha_{41}^{\pm}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2h}\right)$	$\alpha_{42}^{\pm}=\pm\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2h}\right)\sqrt{\frac{1}{h\pi}}$	$\alpha_{43}^{\pm}=0$	$\alpha_{44}^{\pm}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{h}+\frac{3}{4h^2}\right)$		
$\alpha_{50}^{\pm}=\frac{1}{4h}$	$\alpha_{51}^{\pm}=\frac{1}{4h}$	$\alpha_{52}^{\pm}=\pm\frac{1}{2h}\sqrt{\frac{1}{h\pi}}$	$\alpha_{53}^{\pm}=0$	$\alpha_{54}^{\pm}=\frac{1}{4h}\left(1+\frac{1}{2h}\right)$	$\alpha_{55}^{\pm}=\frac{3}{8h^2}$	
$\alpha_{60}^{\pm}=\frac{1}{4h}$	$\alpha_{61}^{\pm}=\frac{1}{4h}$	$\alpha_{62}^{\pm}=\pm\frac{1}{4h}\sqrt{\frac{1}{h\pi}}$	$\alpha_{63}^{\pm}=0$	$\alpha_{64}^{\pm}=\frac{1}{4h}\left(1+\frac{1}{2h}\right)$	$\alpha_{65}^{\pm}=\frac{1}{8h^2}$	$\alpha_{66}^{\pm}=\frac{3}{8h^2}$

Tabelle 2

$b_{10}^{\pm}=1$						
$b_{20}^{\pm}=\pm\sqrt{\frac{1}{h\pi}}$	$b_{21}^{\pm}=0$					
$b_{30}^{\pm}=0$	$b_{31}^{\pm}=0$	$b_{32}^{\pm}=0$				
$b_{40}^{\pm}=\frac{1}{2h}-1$	$b_{41}^{\pm}=2$	$b_{42}^{\pm}=0$	$b_{43}^{\pm}=0$			
$b_{50}^{\pm}=\frac{1}{2h}\,\frac{\pi-4}{\pi-2}$	$b_{51}^{\pm}=0$	$b_{52}^{\pm}=\pm\frac{\pi}{\pi-2}\sqrt{\frac{1}{h\pi}}$	$b_{53}^{\pm}=0$	$b_{54}^{\pm}=0$		
$b_{60}^{\pm}=\frac{1}{2h}$	$b_{61}^{\pm}=0$	$b_{62}^{\pm}=0$	$b_{63}^{\pm}=0$	$b_{64}^{\pm}=0$	$b_{65}^{\pm}=0$	
$\left(\frac{1}{\sigma_0^2}\right)^{\pm}=1$	$\left(\frac{1}{\sigma_1^2}\right)^{\pm}=\frac{1}{2h}$	$\left(\frac{1}{\sigma_2^2}\right)^{\pm}=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)$	$\left(\frac{1}{\sigma_3^2}\right)^{\pm}=\frac{1}{2h}$	$\left(\frac{1}{\sigma_4^2}\right)^{\pm}=\frac{1}{2h^2}$	$\left(\frac{1}{\sigma_5^2}\right)^{\pm}=\frac{(\pi-3)}{2h^2(\pi-2)}$	$\left(\frac{1}{\sigma_6^2}\right)^{\pm}=\frac{1}{2h^2}$

In den runden Klammern gehört „+“ zu Ψ_m^+ und „—“ zu Ψ_m^-. Mit Hilfe der erhaltenen Polynome lassen sich nun die Makroparameter des Gases nach den Reihenkoeffizienten $a_m^\pm$ für die Verteilungsfunktion bestimmen.

2. Die Makroparameter des Gases

Wenn man (1.9) in (1.1) einsetzt, entsprechend mit Ψ_m^+ und Ψ_m^- multipliziert und über Ω^+ und Ω^- integriert, so erhält man infolge der orthonormierten Polynome $\Psi_m^\pm$ ein unendliches System von Integralmomentengleichungen zur Bestimmung der $a_m^\pm$

$$a_m^\pm = \iiint_{\Omega^\pm} \Psi_m^\pm \, V^\pm f^\pm \, d\bar{u}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Mit $V^\pm f^\pm$ sind hier die rechten Seiten in (1.1) bezeichnet. Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$M_i^\pm = \iiint_{\Omega^\pm} \varphi_i f^\pm \, d\bar{u}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

$$\{B\}^\pm = B^+ + B^-, \tag{2.3}$$

wobei B ein Skalar, Vektor oder Tensor sein kann. Multipliziert man (1.9) mit (1.11) und integriert über $\Omega^\pm$, so erhält man

$$M_m^\pm = \frac{1}{\sigma_m^\pm}\left[a_m^\pm + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^\pm M_k^\pm\right], \quad m = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.4}$$

Unter Berücksichtigung von (2.2) und (2.3) lassen sich die mittlere Dichte n, Geschwindigkeit $\bar{U}$ und Temperatur T des Gases nach den $M_i^\pm$ wie folgt ausdrücken [1]

$$n = \iiint_{-\infty}^{\infty} f \, d\bar{u} = \{n\}^\pm = \{M_0\}^\pm, \tag{2.5}$$

wobei

$$n^\pm = \iiint_{\Omega^\pm} f^\pm \, d\bar{u} .$$

Analog

$$n\,\bar{U} = \iiint_{-\infty}^{\infty} f \,\bar{u}\, d\bar{u} = \{n\,\bar{U}\}^\pm = \{\bar{U}_1\}^\pm, \tag{2.6}$$

wobei

$$\{U_{1x}\}^\pm = \{M_1\}^\pm, \quad \{U_{1y}\}^\pm = \{M_2\}^\pm, \quad \{U_{1z}\}^\pm = \{M_3\}^\pm$$

und

$$\frac{3\,n\,T}{2\,h} = \iiint_{-\infty}^{\infty} f\,(\bar{u} - \bar{U})^2 \, d\bar{u} = \left\{\frac{3\,n\,T}{2\,h}\right\}^\pm = \{M_4 + M_5 + M_6\}^\pm - n U^2. \tag{2.7}$$

Wie aus (2.4)–(2.7) zu ersehen ist, sind die Gasparameter bestimmt, wenn die $a_m^\pm$ bekannt sind. Zur Berechnung der $a_m^\pm$ wenden wir uns dem Gleichungssystem (2.1) zu, das wir mit Hilfe des Iterationsverfahrens betrachten. Es gilt

$$a_m^{(n)\pm} = \iiint_{\Omega^\pm} \Psi_m^\pm V^\pm f_{n-1}^\pm \, d\bar{u} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

wobei n die Nummer der Näherung ist.

Als nullte Näherung nehmen wir die ungestörte Außenströmung, die durch die MAXWELLsche Verteilungsfunktion f_0 charakterisiert wird. Das bedeutet, daß die Koeffizienten $a_m^\pm$ in der nullten Näherung folgende Ausdrücke haben

$$a_0^{(0)-} = 1 \quad a_0^{(0)+} = 0 \quad a_k^{(0)\pm} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.9}$$

Setzt man (1.9) in (1.3) und (1.7) ein und berücksichtigt dabei (2.9), so erhält man [1]

$$N^{(0)} = \beta_0^-, \quad Q^{(0)} = A_0^-, \tag{2.10}$$

wobei

$$\beta_0^- = -\iiint_{u_y<0} u_y f_0 \, d\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \tag{2.11}$$

$$A_0^- = \iiint_{u_y<0} |\bar{u} - \bar{u}_1| f_0(\bar{u}_1) \, d\bar{u}_1 \approx \frac{1}{2} |\bar{u} - \bar{U}_0|. \tag{2.12}$$

Hier wurde A_0^- für $h \to \infty$ asymptotisch nach LAPLACE abgeschätzt. Infolge des Gleichgewichtes erhalten wir für $\Phi^{(0)}$

$$\Phi^{(0)} = f_0 Q^{(0)} = f_0 A_0^- \approx \frac{1}{2} f_0 |\bar{u} - \bar{U}_0|. \tag{2.13}$$

Gemäß (2.8) gilt für $a_m^\pm$ in der ersten Näherung

$$a_m^{(1)\pm} = \iiint_{\Omega^\pm} \Psi_m^\pm V^\pm f_0^\pm \, d\bar{u}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

Setzt man (2.10)–(2.13) unter Berücksichtigung von (1.6) und (1.2) in (1.1) ein und integriert über τ, so erhält man für $V^\pm f_0^\pm$

$$V^- f_0^- = f_0 \tag{2.15}$$

$$V^+ f_0^+ = f_0 + \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) [f_0^* - f_0], \tag{2.16}$$

wobei

$$f_0^* = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hu^2} \tag{2.17}$$

$$\Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) = \exp\left\{-\frac{1}{2} |\bar{u} - \bar{U}_0| \frac{y}{u_y}\right\}. \tag{2.18}$$

Infolge (2.14), (1.11), (1.16) und Tabelle 1 erhalten wir für die $a_m^{(1)\pm}$

$$a_0^{(1)-} = \frac{1}{2} \quad a_k^{(1)-} = 0 \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.19}$$

$$a_m^{(1)+} = \bar{a}_m^{(1)+} + \tilde{a}_m^{(1)+} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.20}$$

wobei

$$\bar{a}_m^{(1)+} = \iiint_{u_y>0} \Psi_m^+ f_0^* \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s)\, d\bar{u} \tag{2.21}$$

$$\tilde{a}_0^{(1)+} = \frac{1}{2} + \gamma_0^+ \qquad \tilde{a}_k^{(1)+} = \gamma_k^+ \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.22}$$

und

$$\gamma_m^+ = - \iiint_{u_y>0} \Psi_m^+ f_0 \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s)\, d\bar{u} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.23}$$

Wie aus (2.19)–(2.23) zu ersehen ist, sind die $a_m^{(1)-}$ bestimmt, und zur Ermittlung der $a_m^{(1)+}$ müssen noch die Integrale (2.21) und (2.23) gelöst werden. Hierbei lassen sich die γ_m^+ exakt ausrechnen, während man die $\bar{a}_m^{(1)+}$ für $h \to \infty$ asymptotisch abschätzen kann. Das asymptotische Verhalten der $\bar{a}_m^{(1)+}$ in Randnähe ist ungleichmäßig. Zur Aufdeckung dieser Ungleichmäßigkeit wurden schon Untersuchungen [3] durchgeführt. In diesem Artikel gehen wir nicht näher darauf ein, sondern führen nur die Ergebnisse an. Wenn wir (1.10), (1.17) und (2.18) in (2.23) einsetzen und über $u_y > 0$ integrieren, so lassen sich die γ_m^+ folgendermaßen schreiben

$$\gamma_m^+ = \varkappa_m e^{-y/2} + \eta_m Ei\left(-\frac{y}{2}\right) \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.24}$$

wobei für $m = 0, 1, \ldots, 6$

$$\begin{aligned} &\varkappa_0 = -\frac{1}{2} \qquad \varkappa_1 = \varkappa_3 = 0 \qquad \varkappa_2 = \frac{y}{2\sqrt{2}(\pi - 2)} \\ &\varkappa_4 = \varkappa_6 = -\frac{y}{16\sqrt{2}}\left(1 - \frac{y}{2}\right) \\ &\varkappa_5 = -\frac{y}{4}\sqrt{\frac{2(\pi-2)}{\pi-3}}\left(\frac{6-\pi}{\pi-2} + \frac{y}{8}\right) \end{aligned} \tag{2.25}$$

und

$$\begin{aligned} &\eta_0 = -\frac{y}{4} \qquad \eta_1 = \eta_3 = 0 \qquad \eta_2 = \left(1 + \frac{y}{2}\right)\frac{y}{2\sqrt{2}(\pi-2)} \\ &\eta_4 = \eta_6 = -\frac{y}{8\sqrt{2}}\left(1 - \frac{y^2}{8}\right) \\ &\eta_5 = -\sqrt{\frac{2(\pi-2)}{\pi-3}}\,\frac{y}{8}\left[\frac{y^2}{8} + \frac{1}{\pi-2}(y - \pi + 4)\right]. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Setzt man (1.17), (2.17) und (2.18) in (2.21) ein und integriert über $u_y > 0$, so lassen sich für $\bar{a}_m^{(1)+}$ die asymptotischen Ausdrücke finden. Die asymptotischen Betrachtungen wurden nach dem Parameter $\alpha = \frac{\sqrt{h}}{2} y$ durchgeführt, und zwar für $\alpha \to \infty$ und infolge der ungleichmäßigen Asymptotik in Randnähe für $\alpha \to 0$. Wir erhalten für die $\bar{a}_m^{(1)+}$ $(m = 0, \ldots, 6)$

$$
(2.27)\qquad
\begin{aligned}
\bar{a}_0^{(1)+} &= n_s \\
\bar{a}_1^{(1)+} &= \sqrt{2\,h}\, n_s\,(U_{sx} - 1) \\
\bar{a}_2^{(1)+} &= \sqrt{\frac{2\,h\,\pi}{\pi - 2}}\, n_s \left(U_{sy} - \frac{1}{\sqrt{\pi\, h}}\right) \\
\bar{a}_3^{(1)+} &= 0 \\
\bar{a}_4^{(1)+} &= \sqrt{2}\, h\, n_s \left\{T_{sx} - 2\,U_{sx} - \left(\frac{1}{2\,h} - 1\right)\right\} \\
\bar{a}_5^{(1)+} &= h \sqrt{\frac{2\,(\pi - 2)}{\pi - 3}}\, n_s \left\{T_{sy} - \frac{\pi}{\pi - 2}\sqrt{\frac{1}{\pi\, h}}\, U_{sy} - \frac{1}{2\,h}\,\frac{\pi - 4}{\pi - 2}\right\} \\
\bar{a}_6^{(1)+} &= \sqrt{2}\, h\, n_s \left(T_{sz} - \frac{1}{2\,h}\right),
\end{aligned}
$$

wobei infolge [3]

$$
(2.28)\qquad n_s \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \exp\left\{-3\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2/3}\right\}\left[1 + 0\,(\alpha^{-2/3})\right] & \alpha \to \infty \\[2ex] \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\, \alpha\, l\, n\, \alpha + 0\,(\alpha) & \alpha \to 0 \end{cases}
$$

$$
(2.29)\qquad n_s\, U_{sx} \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3\,h}} \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2/3} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}} \left[1 + 0\,(\alpha^{-2/3})\right] & \alpha \to \infty \\[2ex] \dfrac{-1}{2\sqrt{\pi\, h}}\, \alpha \left[l\, n\, \alpha + \dfrac{3}{2}\, C + 0\,(\alpha)\right] & \alpha \to 0 \end{cases}
$$

C – EULERsche Konstante

$$
(2.30)\qquad n_s\, U_{sy} \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3\,h}} \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{1/3} e^{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2/3}} \left[1 + 0\,(\alpha^{-2/3})\right] & \alpha \to \infty \\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\, h}} \left[1 - \sqrt{\pi}\,\alpha - \alpha^2\, l\, n\, \alpha + 0\,(\alpha^2)\right] & \alpha \to 0 \end{cases}
$$

$$
(2.31)\qquad n_s\, T_{sx} = n_s\, T_{sz} \approx \frac{n_s}{2\,h}
$$

$$
(2.32)\qquad n_s\, T_{sy} \approx \begin{cases} \dfrac{1}{h} \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^{2/3} n_s & \alpha \to \infty \\[2ex] \dfrac{1}{h} \left[\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\alpha + \dfrac{1}{4}\,\alpha^2 + 0\,(\alpha^3\, l\, n\, \alpha)\right] & \alpha \to 0. \end{cases}
$$

Nach Einsetzen von (2.4) in (2.5)–(2.7) unter Berücksichtigung von (2.19), (2.20), (2.22) und (2.24)–(2.32) erhalten wir in der ersten Näherung für die mittlere Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur des Gases für $h \to \infty$

folgende asymptotische Ausdrücke:

$$
(2.33)\quad
\begin{aligned}
n^{(1)} &\approx 1 + n_s + F_0(y) \\
U_x^{(1)} &\approx 1 + \frac{n_s}{n^{(1)}}(U_{sx} - 1) \\
U_y^{(1)} &\approx \frac{1}{n^{(1)}}[n_s\, U_{sy} + F_1(y)] \\
T^{(1)} &\approx \frac{2h}{3\,n^{(1)}}\left[1 + \frac{3}{2h} + n_s T_s - n^{(1)} U^{(1)2} + F_2(y)\right],
\end{aligned}
$$

wobei

$$F_0(y) = -\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{y}{2}} + \frac{y}{2} E\,i\left(-\frac{y}{2}\right)\right]$$

$$F_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\left[\left(\frac{y}{2} - 1\right) e^{-\frac{y}{2}} + \frac{y^2}{4} E\,i\left(-\frac{y}{2}\right)\right]$$

$$F_2(y) = \left(1 + \frac{3}{2h}\right) F_0(y) + \frac{3y(\pi - 6)}{16h(\pi - 2)}\, e^{-\frac{y}{2}}$$

$$n_s T_s = n_s[T_{sx} + T_{sy} + T_{sz}].$$

Für $y \to \infty$ erhält man aus (2.33) die Gasparameter der ungestörten Außenströmung. Infolge der ungleichmäßigen Asymptotik der Makroparameter des Gases in Randnähe kann man schon in der ersten Näherung Aussagen über die Grenzschicht machen. Als Grenzschicht bezeichnen wir eine unendlich dünne Schicht, deren Dicke in unserem Fall umgekehrt proportional zu M ist, was aus dem Übergangsbereich von einer Asymptotik zur anderen ersichtlich ist. Die innere Struktur der Grenzschicht wird durch die asymptotischen Ausdrücke für die Gasparameter (2.33) für $\alpha \to 0$ charakterisiert.

Literaturverzeichnis

[1] Ю. Шлажа: Метод моментов при гиперзвуковом обтекании тел разрежённым газом. Вестник Ленинградского Университета, сер. мат., мех., астр. 1966.

[2] „Аэродинамика разрежённых газоь" Сб. 1, под ред. С. В. Валландера, Изд. ЛГУ 1963.

[3] Баранцев, Р. Г., Ю. Шлажа, К асимптотической структуре пограничного слоя при больших М." Вестник Ленинградского Университета, сер. мат., мех., астр. вып. 4, № 19, 1964.

Eingegangen: 26. Oktober 1965