J. Szlaža

Konvektiver Stoffübergang bei der Bewegung eines festen kugelförmigen Teilchens in einem Zweiphasenmedium

In der vorliegenden Arbeit wird der Übertragungsprozeß eines in einem Zweiphasenmedium eingelagerten Stoffes an ein festes kugelförmiges Teilchen untersucht. Ausgehend von der Lösung des hydrodynamischen Problems der Umströmung einer Kugel durch ein Zweiphasenmedium [1] wird eine Formel für den Gesamtdiffusionsstrom angegeben.

I. Problemstellung

Ein festes kugelförmiges Teilchen mit dem Radius a befinde sich in der stationären laminaren Strömung eines Zweiphasenmediums, wobei beide Phasen im Unendlichen die nach Betrag und Richtung konstanten Geschwindigkeiten U_i besitzen. Wir nehmen an, daß die wirklichen und reduzierten Dichten und somit auch die Porositäten der beiden Phasen konstant sind, d.h. $\rho_i^* = \text{const}$, $\rho_i = \text{const}$ und $\varkappa_i = \frac{\rho_i}{\rho_i^*} = \text{const}$. Ferner sei der Wechselwirkungskoeffizient K ebenfalls konstant.

Das betrachtete feste kugelförmige Teilchen sei nun so klein, daß $Re_i = \frac{aU_i}{\nu_i} << 1$ gilt. Dabei kann man die Strömung in der Umgebung des Teilchens als zäh ansehen. Das hierbei auftretende hydrodynamische Problem der Umströmung eines kugelförmigen Teilchens durch ein Zweiphasenmedium ist in [1] gelöst worden. Hiervon ausgehend kann man an die Lösung des Diffusionsproblems herangehen. Dabei wird folgende Aufgabe gelöst: Das Zweiphasenmedium enthalte eine geringe Beimischung, die im Kontakt mit dem kugelförmigen Teilchen zu chemischen oder physikalisch-chemischen Umwandlungen führt. Gesucht wird der Gesamtdiffusionsstrom an das feste kugelförmige Teilchen.

Die Konzentration c der Beimischung sei klein, so daß man den Diffusionskoeffizient D als konstant voraussetzen kann. Wie aus der Lösung des hydrodynamischen Problems [1] zu ersehen ist, verringern sich die Geschwindigkeiten der Phasen und des Gemisches stetig mit dem Abstand von der Teilchenoberfläche und in unmittelbarer Umgebung des Teilchens existiert keine hydrodynamische Grenzschicht. Ungeachtet dessen, entsteht aber in der Nähe der Teilchenoberfläche eine Diffusionsgrenzschicht. Das hängt damit zusammen, daß die entsprechenden Péclet-Zahlen $Pe_i = \frac{U_i\, a}{D}$ um ein Vielfaches größer sind als die Re_i, so daß gleichzeitig $Re_i \ll 1$ und $Pe_i \gg 1$ sind [2]. Wie bekannt, spielen sich die wesentlichen Diffusionsprozesse für $Pe \gg 1$ in unmittelbarer Nähe der Reaktionsoberfläche ab. Hier in der Diffusionsgrenzschicht ist eine deutliche Änderung der Konzentration des eingelagerten Stoffes zu beobachten.

Die Gleichung für die konvektive Diffusion in der Diffusionsgrenzschicht hat in sphärischen Koordinaten die Gestalt

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\Theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \Theta} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) \tag{1}$$

Hierbei wurde auf der rechten Seite das Glied mit $\frac{1}{r^2 \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin\Theta \frac{\partial c}{\partial \Theta} \right)$ fortlassen, da die Ableitungen entlang der Kugeloberfläche im Vergleich zu den Ableitungen über den Radiusvektor klein sind.

In (1) sind

$$(2) \qquad \begin{aligned} v_r &= \varkappa_1 v_r^{(1)} + \varkappa_2 v_r^{(2)} \\ v_\Theta &= \varkappa_1 v_\Theta^{(1)} + \varkappa_2 v_\Theta^{(2)} \end{aligned}$$

wobei $v_r^{(i)}$ und $v_\Theta^{(i)}$ die entsprechenden Geschwindigkeiten der einzelnen Phasen sind.

Zur Auffindung der Lösung von (1) benötigen wir noch Randbedingungen. Da sich der Diffusionsprozeß in unmittelbarer Umgebung des festen kugelförmigen Teilchens vollzieht, haben wir in weiter Entfernung vom Teilchen die Bedingung

$$(3) \qquad c = c_o \quad \text{für} \quad r \longrightarrow \infty$$

Wir betrachten nun einen solchen Diffusionsprozeß, bei dem auf der Kugeloberfläche die Bedingung

$$(4) \qquad c = 0 \quad \text{für} \quad r = a$$

erfüllt ist. Das bedeutet, daß sich die im Kontakt mit dem kugelförmigen Teilchen befindende Beimischung unmittelbar mit diesem reagiert und somit der größtmögliche Diffusionsstrom gewährleistet wird. Schließlich nehmen wir an, daß im Anströmpunkt keine Singularitäten auftreten, d.h. es ist

$$(5) \qquad c = c_o \quad \text{im Anströmpunkt.}$$

Die Aufgabe besteht nun in der Lösung der Gleichung (1) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (3)-(5) und der Auffindung einer Formel für den Gesamtdiffusionsstrom.

II. Lösung des Problems

Gemäß der Ergebnisse aus [1] lassen sich die Geschwindigkeiten des Zweiphasenmediums v_r und v_Θ nach folgenden Formeln ermitteln

$$
\begin{aligned}
v_r &= \frac{1}{K_1+K_2}\left\{ K_1K_2\, u_r^{(1)} + (\varkappa_2K_2-\varkappa_1K_1)u_r^{(2)} \right\} \\
v_\Theta &= \frac{1}{K_1+K_2}\left\{ K_1K_2\, u_\Theta^{(1)} + (\varkappa_2K_2-\varkappa_1K_1)u_\Theta^{(2)} \right\} ,
\end{aligned} \tag{6}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
u_r^{(1)} &= U^* \left\{ 1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right\} \cos\Theta \\
u_\Theta^{(1)} &= U^* \left\{ 1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right\} \sin\Theta \\
u_r^{(2)} &= \bar{U}\left\{ 1 - \frac{a^3}{r^3}\left(1+\frac{3}{\gamma a}+\frac{3}{\gamma^2a^2}\right) + 3\,\frac{a}{r}\, e^{-\gamma(r-a)}\left(\frac{1}{\gamma r}+\frac{1}{\gamma^2r^2}\right)\right\} \cos\Theta \\
u_\Theta^{(2)} &= -\bar{U}\left\{ 1 + \frac{a^3}{2r^3}\left(1+\frac{3}{\gamma a}+\frac{3}{\gamma^2a^2}\right) - \frac{3}{2}\,\frac{a}{r}\, e^{-\gamma(r-a)}\left(1+\frac{1}{\gamma r}+\frac{1}{\gamma^2r^2}\right)\right\} \sin\Theta
\end{aligned} \tag{7}
$$

und

$$
\begin{aligned}
K_i &= \frac{K}{\varkappa_i\,\mu_i} \qquad i = 1,2 \\
\gamma &= \sqrt{K_1+K_2} \\
U^* &= \frac{U_1}{K_1} + \frac{U_2}{K_2} \\
\bar{U} &= U_2 - U_1
\end{aligned} \tag{8}
$$

sind. Wegen der Kontinuitätsgleichung gilt

$$(9) \qquad \begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \psi}{r \partial \Theta} \\ v_\Theta &= - \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

wobei ψ die Stromfunktion ist. Aus (9) bestimmen wir unter Berücksichtigung von (6) die Stromfunktion ψ mit einer Genauigkeit bis auf eine beliebige Konstante. Die Konstante wählen wir so, daß $\psi = 0$ ist für $r = a$. Im Ergebnis erhalten wir

$$(10) \qquad \psi = \frac{r^2 \sin^2 \Theta}{2 \gamma^2} \{ \alpha \tilde{u}_r^{(1)} + ß \tilde{u}_r^{(2)} \} ,$$

wobei

$$\tilde{u}_r^{(i)} = \frac{u_r^{(i)}}{\cos \Theta} \qquad i = 1, 2$$

$$\alpha = K_1 K_2$$

$$ß = \varkappa_2 K_2 - \varkappa_1 K_1$$

sind.

Da die wesentlichen Prozesse sich in der Diffusionsgrenzschicht abspielen, interessieren uns nur Lösungen der Gleichung (1) für die Werte von r, die sich wenig vom Kugelradius a unterscheiden. Bezeichnen wir mit $x = r - a$, dann erhalten wir aus (10) für kleine x

$$(11) \qquad \psi = \frac{3 \sin^2 \Theta}{4 \gamma^2} [\alpha U^* + ß \bar{U} (\gamma a + 1)] x^2$$

Wegen (6) ergibt sich für die Tangentialgeschwindigkeit v_Θ bei kleinen x

$$(12) \qquad v_\Theta = - \frac{3 \sin \Theta}{2a \gamma^2} [\alpha U^* + ß \bar{U} (\gamma a + 1)] x$$

Berücksichtigt man, daß für kleine Werte von x $(x \ll a)$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \gg \frac{2}{a}\,\frac{\partial c}{\partial x}$$

ist, dann kann man die Gleichung (1) in der Gestalt

$$v_r \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{v_\Theta}{a}\,\frac{\partial c}{\partial \Theta} = D\,\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{13}$$

schreiben. Gehen wir in dieser Gleichung von den Variablen x, Θ zu den Variablen Θ, ψ über und berücksichtigen dabei (9), so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial c}{\partial \Theta}\right)_\psi = D\,a^2 \sin\Theta\,\frac{\partial}{\partial \psi}\left(a \sin\Theta\, v_\Theta\,\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)$$

Wegen (11) und (12) resultiert dann hieraus die Gleichung

$$\left(\frac{\partial c}{\partial \Theta}\right)_\psi = \frac{D}{\gamma}\,a^2 \sin^2\Theta\,\sqrt{3[\alpha U^* + \beta \bar{U}(\gamma a + 1)]}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sqrt{\psi}\,\frac{\partial c}{\partial \psi}\right) \tag{14}$$

Anstelle von (3) - (5) gelten nun folgende Randbedingungen:
Auf der Teilchenoberfläche

$$c = 0 \quad \text{für} \quad \psi = 0\,, \tag{15}$$

in weiter Entfernung vom Teilchen

$$c = c_0 \quad \text{für} \quad \psi \to \infty\,, \tag{16}$$

im Anströmpunkt

$$c = c_0 \quad \text{für} \quad \Theta = 0\,,\ \psi = 0 \tag{17}$$

Durch die Substitution

$$(18)\qquad \begin{aligned} t &= \frac{D}{\gamma} a^2 \sqrt{3[\alpha U^* + \beta\bar{U}(\gamma a+1)]} \int \sin^2\Theta \, d\Theta = \\ &= \frac{D}{2\gamma} a^2 \sqrt{3[\alpha U^* + \beta\bar{U}(\gamma a+1)]} \left(\Theta - \frac{\sin 2\Theta}{2}\right) + C_1 \end{aligned}$$

läßt sich (14) in die Gleichung

$$(19)\qquad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sqrt{\phi} \frac{\partial c}{\partial \phi} \right)$$

überführen. Wie eine einfache Dimensionsanalyse zeigt, hängt die Lösung $c(\phi, t)$ von den Variablen ϕ, t nur über die Kombination $\eta = \frac{\phi}{t^{2/3}}$ ab. Demnach können wir die Gleichung (19) in der Form

$$(20)\qquad \frac{d^2c}{dz^2} + \frac{4}{3} z^2 \frac{dc}{dz} = 0$$

schreiben, wobei $z = \sqrt{\eta}$ ist. Für die Konzentration c erhalten wir unmittelbar aus dieser Gleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen (15) und (16) den Ausdruck

$$(21)\qquad c = \frac{c_o}{1,15} \int_o^z \exp\left\{ - \frac{4}{9} z^3 \right\} dz ,$$

wobei

$$(22)\qquad z = \frac{\sqrt{3[\alpha U^* + \beta\bar{U}(\gamma a+1)]} \sin\Theta \cdot x}{2\gamma\left[\frac{D}{2\gamma} a^2 \sqrt{3[\alpha U^* + \beta\bar{U}(\gamma a+1)]} \left(\Theta - \frac{\sin 2\Theta}{2}\right) + C_1\right]^{1/3}}$$

ist. In der Umgebung des Anströmpunktes, d.h. für kleine Θ gilt

$$z \approx \frac{\sqrt{3[\alpha U^* + \beta\bar{U}(\gamma a+1)} \, \Theta \cdot x}{2\gamma \left[\frac{D}{3\gamma} a^2 \sqrt{3[\alpha U^* + \beta\bar{U}(\gamma a+1)]} \, \Theta^3 + C_1\right]^{1/3}}$$

Damit für $\Theta = 0$ die Größe z positiv ist, ist $C_1 = 0$.
Demnach ergibt sich aus (22)

$$(23) \qquad z = \sqrt[3]{\frac{3[\alpha U^* + \beta \bar{U}(\gamma a + 1)]}{4\gamma^2 a^2 D}} \cdot \frac{x \sin\Theta}{(\Theta - \frac{\sin 2\Theta}{2})^{1/3}}$$

Der Diffusionsstrom an der Teilchenoberfläche läßt sich nach der Formel

$$j = D \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}$$

ermitteln. Nach (21) und (23) erhalten wir

$$(24) \qquad j = D \frac{c_o}{1{,}15} \sqrt[3]{\frac{3[\alpha U^* + \beta \bar{U}(\gamma a + 1)]}{4\gamma^2 a^2 D}} \; \frac{\sin\Theta}{(\Theta - \frac{\sin 2\Theta}{2})^{1/3}}$$

Für die Dicke der Diffusionsgrenzschicht ergibt sich

$$(25) \qquad \delta = \frac{Dc_o}{j} = 1{,}15 \sqrt[3]{\frac{4\gamma^2 a^2 D}{3[\alpha U^* + \beta \bar{U}(\gamma a + 1)]}} \; \frac{(\Theta - \frac{\sin 2\Theta}{2})^{1/3}}{\sin\Theta}$$

Der gesamte Stoffstrom J an das Teilchen läßt sich nach der Formel

$$(26) \qquad J = \int j \, ds = 2\pi a^2 \int_0^\pi j \sin\Theta \, d\Theta$$

berechnen.
Unter Berücksichtigung von (24), (8) und (10) erhalten wir schließlich

$$(27) \qquad J = 7{,}98 \cdot c_o D^{2/3} a^{4/3} \left[\varkappa_1 U_1 + \varkappa_2 U_2 + a(\mu_1 - \mu_2)(U_2 - U_1) \sqrt{\frac{K \varkappa_1 \varkappa_2}{\mu_1 \mu_2 (\varkappa_1 \mu_1 + \varkappa_2 \mu_2)}} \right]^{1/3}$$

Die Funktion von Θ in der Formel (24) hat im Punkt $\Theta = 0$ den Wert 1 , im Punkt $\Theta = \frac{\pi}{2}$ den Wert $\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ und für $\Theta = \pi$ den Wert 0 . Demnach hat der Diffusionsstrom seinen größten Wert im Anströmpunkt $\Theta = 0$, er verringert sich mit wachsendem Θ und wird Null im Staupunkt. Die Dicke der Diffusionsgrenzschicht (25) wird größer mit wachsendem Θ und wird ∞ für $\Theta = \pi$. Zu Beginn haben wir vorausgesetzt, daß die Dicke der Diffusionsgrenzschicht bedeutend kleiner ist, als der Radius des Teilchens. Hieraus läßt sich die Schlußfolgerung ziehen, daß von gewissen Werten Θ an, die nahe an $\Theta = \pi$ liegen, die betrachtete Theorie nicht mehr anwendbar ist. Abgesehen davon, hat aber das Gebiet $\Theta \sim \pi$ wenig Einfluß auf den gesamten Stoffstrom J .

Zum Schluß sei noch angemerkt, daß der Diffusionsstrom j , die Dicke der Diffusionsgrenzschicht δ und der gesamte Stoffstrom J von den Parametern der Komponenten des Zweiphasengemisches abhängen. Schon für eine quasihomogene Strömung, d.h. wenn $U_1 = U_2$ ist, gehen die erhaltenen Formeln (24), (25) und (27) in die entsprechenden Formeln einer homogenen Strömung [2] über.

Mit anderen Worten, sind die Geschwindigkeiten der beiden Phasen im Unendlichen gleich, dann spielt die Wechselwirkung zwischen den beiden Phasen bei der Lösung des Diffusionsproblems keine Rolle und wir können sofort auf bekannte Formeln für homogene Medien zurückgreifen.

Literatur

[1] J. Szlaža, Umströmung einer Kugel durch ein Zweiphasenmedium, erscheint in der ZAMM

[2] В.Г. Левич, Физико-химическая гидродинамика, Физматгиз, М., 1959.