

Laminare Grenzschicht bei Zweikomponentenströmungen  
mit Druckgradient in Längsrichtung

Ausgehend von der Rachmatulinschen Modellvorstellung für Mehrphasenströmungen [ 1 ] wird in der vorliegenden Arbeit die laminare Grenzschicht bei der Umströmung eines Körpers durch ein Zweikomponentenmedium behandelt. Dabei knüpfen wir an die Untersuchungen aus [ 2 ] an und leiten das Gleichungssystem zur Bestimmung des Formparameters her. Danach wird ein einparametriges Näherungsverfahren angegeben, das zur Ermittlung dieses Formparameters führt. Schließlich wird die laminare Grenzschicht bei der quasi-homogenen ( $U_1 = U_2$ ) Umströmung eines Körpers untersucht.

1. Herleitung des Gleichungssystems zur Bestimmung des Formparameters

Wir betrachten die laminare ebene stationäre Strömung eines zähen Zweikomponentenmediums um einen Körper und setzen voraus, daß die wirklichen und reduzierten Dichten der beiden Komponenten konstant sind, d.h.  $\rho_i^* = \text{const.}$  und  $\rho_i = \text{const.}$  Das Gleichungssystem für die Strömung in der Grenzschicht hat die Gestalt [ 2 ]

$$(1) \quad u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = U_i \frac{dU_i}{dx} + \nu_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{K}{\rho_i} \sum_{j=1}^2 [(u_j - U_j) - (u_i - U_i)]$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \quad i = 1, 2$$

mit den Randbedingungen

$$(2) \quad \begin{aligned} u_i = v_i = 0 & \quad \text{für } y = 0 \\ u_i \rightarrow U_i & \quad \text{für } y \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

Hierbei sind

- $u_i, v_i$  - die Geschwindigkeiten der Gemischkomponenten in x- und y-Richtung
- $\nu_i$  - die kinematischen Zähigkeiten der Komponenten
- $U_i$  - die Geschwindigkeiten der Komponenten in der Potentialströmung
- $K$  - der Wechselwirkungskoeffizient zwischen den Komponenten, der als konstant vorausgesetzt wird.

Die Gleichungen und Bedingungen (1)-(2) bilden die Grundlage für die Herleitung des Gleichungssystems zur Bestimmung des Formparameters. Dabei werden wir nicht wie beim Verfahren nach v. Kármán-Pohlhausen als charakteristische Grenzschichtdicke die bedingte Dicke  $\delta_i$  nehmen, sondern die Impulsverlustdicke  $\delta_i^{**}$ . Wie aus der Grenzschichttheorie für homogene Medien bekannt ist, führt diese Betrachtungsweise zu exakteren Ergebnissen [3], und es ist anzunehmen, daß dies auch für Zweikomponentengemische zutrifft. Wir geben also die einparametrische Schar von Geschwindigkeitsprofilen für die Komponenten in den

Grenzschichtquerschnitten in der Gestalt

$$(3) \quad \frac{u_i}{U_i} = \varphi_i \left( \frac{y}{\delta_i^{***}}; \Theta_i \right) = \varphi_i(\eta_i, \Theta_i)$$

vor, wobei der Formparameter  $\Theta_i$  analog zu [2] wie folgt erklärt ist:

$$(4) \quad \Theta_i = - \left( \frac{d^2 \varphi_i}{d\eta_i^2} \right) \Big|_{\eta_i=0} = - \frac{\delta_i^{***2}}{U_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \Big|_{y=0}.$$

Berücksichtigen wir nun (1), so erhalten wir

$$(5) \quad \Theta_i = \frac{\delta_i^{***2}}{\nu_i} \alpha_i,$$

wobei

$$(6) \quad \alpha_i = U_i' + \frac{K}{g_i} \sum_{j=1}^2 \left( 1 - \frac{u_j}{U_i} \right)$$

ist. Da  $H_i^{***} = \frac{\delta_i^{***}}{\delta_i}$  ist, gibt es zwischen dem Formparameter

$\lambda_i = \frac{\delta_i^2}{\nu_i} \alpha_i$  aus [2] und dem hier eingeführten folgenden Zusammen-

menhang:

$$(7) \quad \Theta_i = \lambda_i H_i^{***2}.$$

Gemäß [2] kann man nun ohne große Schwierigkeiten das Gleichungssystem für den Formparameter  $\Theta_i$  herleiten. Dazu schreiben wir zunächst die Gleichung für  $\lambda_i$  auf

$$(8) \quad \lambda_i' = \frac{U_i'}{U_i} A_i + \frac{\alpha_i'}{\alpha_i} B_i + \frac{K}{g_i U_i^2} \sum_{j=1}^2 \left[ U_j \left( \sqrt{\frac{\nu_j \alpha_i}{\nu_i \alpha_j}} C_{ij}^{-D_i} \right) - U_i E_i \right],$$

wobei

$$A_i = \frac{1}{F_i} \left[ b_i - \lambda_i (2H_i^{**} + H_i^*) \right]$$

$$B_i = \frac{\lambda_i H_i^{**}}{2F_i}$$

$$C_{ij} = \frac{\sqrt{\lambda_i \lambda_j} H_j^*}{F_i}$$

$$(9) \quad D_i = \frac{b_i}{F_i}$$

$$E_i = \frac{1}{F_i} (\lambda_i H_i^* - b_i)$$

$$F_i = \frac{1}{2} H_i^{**} + \lambda_i \frac{dH_i^{**}}{d\lambda_i}$$

sind. Wegen (7) und (9) gilt

$$F_i = \frac{1}{2H_i^{**}} \frac{d\theta_i}{d\lambda_i},$$

und wir erhalten

$$A_i = \frac{L_i}{d\theta_i/d\lambda_i}$$

$$B_i = \frac{\theta_i}{d\theta_i/d\lambda_i}$$

$$C_{ij} = \frac{2\sqrt{\theta_i \theta_j} H_j}{d\theta_i/d\lambda_i}$$

$$D_i = \frac{2 \xi_i}{d\theta_i/d\lambda_i}$$

$$E_i = \frac{2(\theta_i H_i - \xi_i)}{d\theta_i/d\lambda_i} ,$$

wonach wir infolge (8) für den Formparameter  $\theta_i$  die Gleichung

$$(10) \quad \theta_i' = \frac{\bar{U}_i' L_i}{U_i} + \frac{\alpha_i'}{\alpha_i} \theta_i + \frac{2K}{\rho_i U_i^2} \sum_{j=1}^2 \left[ U_j \left( \sqrt{\frac{\nu \alpha_i}{\nu \alpha_j}} \right) \theta_i \theta_j^{H_j - \xi_i} - U_i (\theta_i^{H_i} \xi_i) \right]$$

schreiben können. Dabei sind

$$(11) \quad \xi_i = \frac{\partial(u_i/U_i)}{\partial(y/\rho_i^{**})} \Big|_{y=0} = \left( \frac{d\varphi_i}{d\eta_i} \right) \Big|_{\eta_i=0}$$

$$H_i = \frac{\sigma_i^*}{\sigma_i^{**}} = \frac{\int_0^{\infty} (1-\varphi_i) d\eta_i}{\int_0^{\infty} \varphi_i (1-\varphi_i) d\eta_i}$$

$$L_i = 2 \left[ \xi_i - \theta_i (2+H_i) \right] .$$

## II. Das Näherungsverfahren

Um den Formparameter  $\Theta_i$  nach (10) ermitteln zu können, müssen die Funktionen  $L_i$ ,  $\xi_i$  und  $H_i$  bestimmt werden. Hierzu geben wir die Schar von Geschwindigkeitsprofilen in der Gestalt

$$(12) \quad \frac{u_i}{U_i} = 1 + a_1^{(i)} \eta_i^{n_i} + a_2^{(i)} \eta_i^{n_i+1}$$

vor, wobei  $\eta_i = 1 - \frac{y}{\sigma_i}$  ist und  $n_i$  einen längs der Grenzschicht veränderlichen Exponenten darstellt, der die Ordnung angibt, mit der die Geschwindigkeitsprofile (12) auf dem Rand

der Grenzschicht ( $\eta_i = 0$ ) zu dem Wert  $\frac{u_i}{U_i} = 1$  übergehen.

Die Koeffizienten  $a_1^{(i)}$ ,  $a_2^{(i)}$  lassen sich aus den Bedingungen

$$(13) \quad u_i = 0, \quad \frac{\partial^2(u_i/U_i)}{\partial(y/\sigma_i)^2} = -\frac{\sigma_i^2}{\nu_i} \lambda_i \quad \text{für } y = 0$$

ermitteln. Demnach erhalten wir

$$(14) \quad a_1^{(i)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_i}{n_i} - (n_i + 1) \right]$$

$$a_2^{(i)} = \frac{1}{2} \left[ (n_i - 1) - \frac{\lambda_i}{n_i} \right]$$

Nun können wir die für die Grenzschicht charakteristischen Größen  $b_i$ ,  $H_i^*$ ,  $H_i^{**}$  [2] in der Form

$$b_i = \frac{\partial(u_i/U_i)}{\partial(y/\delta_i)} \Big|_{y=0} = \frac{\tau_w^{(i)} \sqrt{\lambda_i}}{U_i \sqrt{\mu_i \rho_i^* \alpha_i}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_i}{n_i} + (n_i + 1) \right]$$

$$(15) \quad H_i^* = \frac{\delta_i^*}{\delta_i} = + \frac{1}{2(n_i+2)} \left[ 3 - \frac{\lambda_i}{n_i(n_i+1)} \right]$$

$$H_i^{**} = \frac{\delta_i^{**}}{\delta_i^*} = H_i^* - \frac{a_1^{(i)^2}}{2n_i + 1} - \frac{2a_1^{(i)} a_2^{(i)}}{2n_i + 2} - \frac{a_2^{(i)^2}}{2n_i + 3}$$

schreiben. Im Ablösungspunkt S der Grenzschicht ist  $\tau_w^{(i)} = 0$  und aus (15) folgt  $b_i = 0$  und wir erhalten

$$(16) \quad \lambda_i^{(s)} = - n_i (n_i + 1) .$$

Wie aus (12) zu ersehen ist, ist die angenommene Schar von Geschwindigkeitsprofilen zweiparametrig. Diese können wir einparametrig gestalten, wenn wir einen Zusammenhang zwischen  $\lambda_i$  und  $n_i$  herstellen.

Wie bekannt, nimmt der Druck im vorderen Bereich eines Körpers mit konvexem Profil von seinem größten Wert im Staupunkt M ab ( $\frac{dp}{dx} < 0$ ), bis er einen gewissen minimalen Wert im Punkt P, wo  $\frac{dp}{dx} = 0$  ist, annimmt. Danach wächst der Druck wieder an ( $\frac{dp}{dx} > 0$ ).

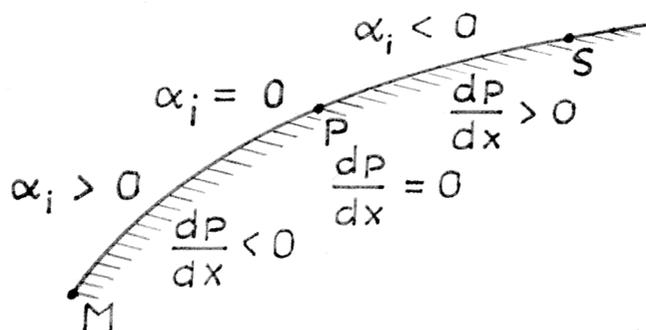


Abb. 1

Nun haben wir aber nach [2] für die Potentialströmung die Gleichung

$$U_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_i^*} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\rho_i} \sum_{j=1}^2 (U_j - U_i),$$

die wir wegen (6) auch in der Form

$$(17) \quad U_i \alpha_i = - \frac{1}{\rho_i^*} \frac{\partial p}{\partial x}$$

schreiben können. Hieraus läßt sich schlußfolgern, daß im Druckabfallgebiet  $\alpha_i > 0$ , im Punkt des Druckminimums  $\alpha_i = 0$  und im Druckanstieggebiet  $\alpha_i < 0$  sind. Somit nehmen die  $\lambda_i$  von M beginnend zum Punkt S hin ab, wobei im Punkt P  $\lambda_i = 0$  ist.

Ferner gilt auf der Oberfläche des Körpers im Gebiet zwischen dem Staupunkt M und dem Ablösungspunkt S der Grenzschicht

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} > 0, \quad \text{im Punkt S dann } \frac{\partial u_i}{\partial y} = 0 \quad \text{und danach } \frac{\partial u_i}{\partial y} < 0.$$

Das bedeutet, daß im Druckabfallgebiet der Grenzschicht die Geschwindigkeitsprofile stärker ausgeprägt sind als im Druckanstieggebiet. Deswegen kann man annehmen, daß sich die Ordnung, mit der sich die äußere Strömung an die Grenzschichtströmung anschließt, beim Übergang vom Druckabfall- zum Druckanstieggebiet verringert. Mit fallendem  $\lambda_i$  muß demzufolge  $n_i$  kleiner werden.

Wir wählen nun die Abhängigkeit zwischen  $\lambda_i$  und  $n_i$  so, daß wir für die Geschwindigkeitsprofile (12) im Punkt des Druckminimums ( $\lambda_i = 0$ ) ein Polynom fünften Grades und im Ablösungspunkt der Grenzschicht ( $\lambda_i = \lambda_i^{(s)} = -12$ ) ein Polynom vierten

Grades erhalten, d.h. es gelte

$$(18) \quad \lambda_i = 12 (n_i - 4) \quad n_i = \frac{\lambda_i}{12} + 4 .$$

Jetzt können wir mit Hilfe von (18)  $b_i$ ,  $H_i^*$ ,  $H_i^{**}$  gemäß (15) als Funktionen des Parameters  $n_i$  darstellen. Wegen (7), (11) und (15) kann man

$$(19) \quad \begin{aligned} \Theta_i &= \lambda_i H_i^{**2} & \zeta_i &= b_i H_i^{**} & H_i &= \frac{H_i^*}{H_i^{**}} \\ L_i &= 2 \left[ \zeta_i - \Theta_i (2 + H_i) \right] \end{aligned}$$

schreiben, und die Größen  $\Theta_i$ ,  $\zeta_i$ ,  $H_i$ ,  $L_i$  lassen sich demzufolge auch nach  $n_i$  ausdrücken.

Danach gewinnt man dann die Funktionen  $\zeta_i(\Theta_i)$ ,  $H_i(\Theta_i)$ ,  $L_i(\Theta_i)$ .

Über die Größen (19) lassen sich folgende Aussagen machen: Wie schon erwähnt, nimmt  $\lambda_i$  und  $n_i$  von M beginnend nach S hin ab. Wegen (19) gilt das auch für  $\Theta_i$ . Im Punkt S ist  $\zeta_i = 0$ .

Wir untersuchen nun das Verhalten von  $L_i$  im Staupunkt M.

Führen wir die Größe

$$(20) \quad \xi_i = \frac{\Theta_i}{\alpha_i} = \frac{\sigma_i^{**2}}{\nu_i}$$

ein, dann kann man die Gleichung (10) in der Gestalt

$$(21) \quad \xi_i' = \frac{U_i'}{\alpha_i' U_i} L_i + \frac{2K}{\rho_i U_i^2} \sum_{j=1}^2 \left\{ U_j \left[ \sqrt{\frac{\nu_j}{\nu_i}} \sqrt{\xi_i \xi_j} H_j - \frac{\xi_i}{\alpha_i} \right] - U_i \left( \xi_i H_i - \frac{\xi_i}{\alpha_i} \right) \right\}$$

schreiben. Im Staupunkt  $M$  ist  $U_i = 0$ . Lassen wir in (21)  $U_i \rightarrow 0$  streben, dann erhalten wir

$$(22) \quad L_i + \frac{2k}{g_i} \sum_{j=1}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\nu_j}{\nu_i}} \sqrt{\xi_i \xi_j} H_j - \xi_i H_i \right\} = 0 .$$

Für spitze Körper ist im Punkt  $M$   $\sigma_i^{**} = 0$  und wegen (20) und (22) ergibt sich  $L_i = 0$ .

Wie verhält es sich nun für stumpfe Körper.

Dazu schreiben wir (22) in der Form

$$(23) \quad t_i L_i + \sum_{j=1}^2 \left\{ \sqrt{\nu_j \xi_j} H_j - \sqrt{\xi_i \nu_i} H_i \right\} = 0 ,$$

wobei

$$(24) \quad \frac{1}{t_i} = \frac{2K}{g_i} \sqrt{\frac{\xi_i}{\nu_i}} = \frac{2K \sigma_i^{**}}{\mu_i}$$

ist. Wir addieren die beiden Gleichungen in (23) und erhalten

$$(25) \quad t_i L_1 + t_2 L_2 = 0 .$$

Für stumpfe Körper ist im Staupunkt  $\sigma_i^{**} > 0$  und wegen (24)  $t_i > 0$ . Deshalb folgt aus (25)  $L_i = 0$ .

Im Staupunkt ist also sowohl für spitze als auch für stumpfe Körper  $L_i = 0$ .

Die Ermittlung der Funktionen  $\xi_i$ ,  $H_i$ ,  $L_i$  wurde nun so vorgenommen, daß vom Ablösungspunkt der Grenzschichten, wo  $n_i = 3$  ist,  $n_i$  vergrößert und danach  $\Theta_i$ ,  $\xi_i$ ,  $H_i$ ,  $L_i$  bestimmt

wurden. Die Rechnung wurde solange durchgeführt, bis der Wert für  $n_i$  erreicht war, für den  $L_i$  im Staupunkt M verschwindet. Die Ergebnisse der Rechnung sind auf der Abb. 2 graphisch dargestellt. Dabei sind die Punkte S, P und M besonders markiert.

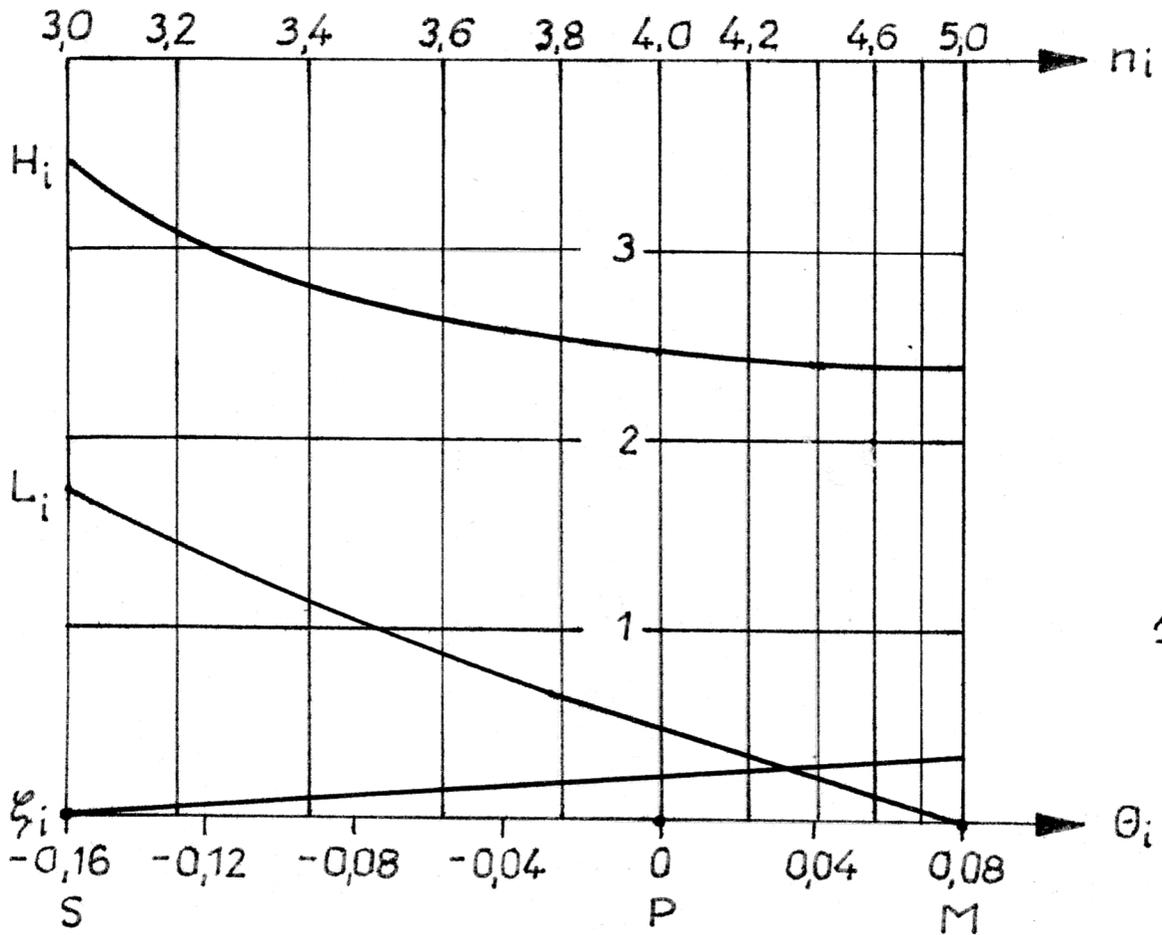


Abb.2

Bei den weiteren Untersuchungen war es wichtig, für die Funktionen  $\xi_i$ ,  $H_i$ ,  $L_i$  analytische Ausdrücke zu besitzen. Mit Hilfe nomographischer Methoden sind diese analytischen Ausdrücke aus den in der Abb. 2 angegebenen Ergebnissen ermittelt worden.

Die besten Näherungen für die in der Abb. 2 dargestellten Kurven sind die Funktionen:

$$\begin{aligned} \xi_i &= 0,249 + 1,40 \theta_i \\ L_i &= 2,505 e^{-2,507 \theta_i} - 2 \\ H_i &= 1,70 (\theta_i + 0,2)^{-0,23} \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der weiteren Untersuchungen sind die Kurven in Abb. 2 durch Polynome ersten und zweiten Grades angenähert worden. Dabei führten folgende Polynome zu einer guten Übereinstimmung mit den in Abb. 2 enthaltenen Ergebnissen:

$$\begin{aligned} \xi_i &= 0,249 + 1,40 \Theta_i \\ (26) \quad L_i &= 0,505 - 6,280 \Theta_i + 7,872 \Theta_i^2 \\ H_i &= 2,4398 - 3,0640 \Theta_i + 20,7984 \Theta_i^2 \end{aligned}$$

Sind nun  $\xi_i$ ,  $L_i$ ,  $H_i$  als Funktionen von  $\Theta_i$  bekannt, dann kann man zur Bestimmung von  $\Theta_i$  übergehen, indem man das Gleichungssystem (10) löst.

III. „Quasihomogene“ Umströmung eines Körpers

Wir untersuchen nun die Grenzschicht bei der „quasihomogenen“ Umströmung eines Körpers. In diesem Falle ist  $U_1 = U_2 = U_0(x)$ . Wenn wir die Bezeichnung  $z_i = \sqrt{\Theta_i}$  einführen und berücksichtigen, daß  $\alpha_i = U_0'$  ist, dann erhalten wir aus (10) die Gleichung

$$(27) \quad 2z_i z_i' = \frac{U_0'}{U_0} L_i + \frac{U_0''}{U_0'} z_i^2 + \frac{2K}{9_i U_0} \sum_{j=1}^2 \left[ \sqrt{\frac{v_j}{v_i}} z_i z_j H_j - z_i^2 H_i \right].$$

Wie aus Abb. 2 zu ersehen ist, unterscheidet sich  $L_i$  nur wenig von einer Geraden und läßt sich in der Form

$$L_i = a - b \Theta_i$$

darstellen, wobei  $a = 0,524$  und  $b = 6,55$  sind.

Die Funktion  $H_i$  übernehmen wir aus (26) in der Gestalt

$$H_i = c - d \Theta_i + e \Theta_i^2,$$

wobei  $c = 2,4398$ ,  $d = 3,0640$  und  $e = 20,7984$  sind.

Obwohl wir durch die Betrachtung der „quasihomogenen“ Umströmung eines Körpers das Gleichungssystem (10) vereinfachen konnten, ist die Lösung des Gleichungssystems (27) noch mit beträchtlichen mathematischen Schwierigkeiten verbunden. Wir suchen die Lösung von (27) in der Form

$$(28) \quad z_i = z_0 (1 + \epsilon_i)$$

wobei  $z_0 = \sqrt{\Theta_0}$  der Gleichung

$$(29) \quad 2z_0 z_0' = \frac{U_0'}{U_0} L_0 + \frac{U_0''}{U_0'} z_0^2$$

genügen soll,  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x) \ll 1$  und  $L_0 = a - b z_0^2$  sind. Mit anderen Worten,  $z_0$  soll die Lösung des Grenzsichtproblems für die homogene Strömung [ 3 ] sein, die man erhält, wenn z.B. nur eine der beiden Komponenten des Zweiphasenmediums den Körper umströmt. Wenn wir in der Gleichung (29) die Substitution  $z_0 = \sqrt{\Theta_0}$  vornehmen, so erhalten wir für  $\Theta_0$  eine lineare Differentialgleichung. Integrieren wir diese unter Berücksichtigung der Bedingung  $U_0 = 0$  für  $x = 0$ , dann gelangen wir zu der Formel

$$(30) \quad \Theta_0 = \frac{a U_0'(x)}{[U_0(x)]^b} \int_0^x [U_0(\xi)]^{b-1} d\xi .$$

hieraus ergibt sich

$$(31) \quad \Theta_0 \Big|_{x=0} = \frac{a}{b} = 0,08 .$$

Nachdem wir  $\Theta_0$  und somit auch  $z_0$  bestimmt haben, können wir in unseren Betrachtungen fortfahren. Indem wir (28) in (27) einsetzen, die Gleichung (29) berücksichtigen, alle Glieder zweiter und höherer Ordnung bezüglich  $\varepsilon_i$  vernachlässigen und die Substitution  $f_i = \sqrt{\nu_i} \varepsilon_i$  vornehmen, erhalten wir folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung von  $f_i$  :

$$(32) \quad f_i' = p_i(x) f_i + q_i(x) \sum_{j=1}^2 (f_j - f_i) + r_i(x) \quad i=1,2,$$

wobei

$$p_i(x) = - \frac{a}{z_0^2} \frac{U_0'}{U_0} + \frac{K H_0}{g_i \sqrt{v_i} U_0} \sum_{j=1}^2 (\sqrt{v_j} - \sqrt{v_i})$$

$$q_i(x) = \frac{K}{g_i U_0} (H_0 - 2dz_0^2 + 4ez_0^4)$$

$$r_i(x) = \frac{K H_0}{g_i U_0} \sum_{j=1}^2 (\sqrt{v_j} - \sqrt{v_i})$$

und

$$H_0 = c - dz_0^2 + ez_0^4$$

sind. Um das Gleichungssystem (32) lösen zu können, müssen wir noch Randbedingungen für  $f_i$  finden. Berücksichtigen wir die eingeführten Substitutionen und (31), dann erhalten wir im Staupunkt M des Körpers für  $f_i$  folgenden Ausdruck

$$f_i \Big|_{x=0} = \left( \sqrt{\frac{b}{a} \theta_i \Big|_{x=0}} - 1 \right) \sqrt{v_i} .$$

Den Wert  $\theta_i \Big|_{x=0}$  können wir aus der Abb. 2 entnehmen und unter Berücksichtigung von (31) erhalten wir schließlich

$$(33) \quad f_i \Big|_{x=0} = 0 .$$

Gesucht wird also die Lösung des linearen inhomogenen Gleichungssystems

$$(34) \quad \frac{d\vec{f}}{dx} = A(x) \vec{f}(x) + r(x)$$

unter Berücksichtigung der Bedingung

$$(35) \quad \vec{f}(0) = 0,$$

wobei

$$A(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) - q_1(x) & q_1(x) \\ q_2(x) & p_2(x) - q_2(x) \end{bmatrix}$$
$$\vec{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \quad \vec{r}(x) = \begin{bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \end{bmatrix}$$

sind. Die allgemeine Lösung des Problems (34)-(35) kann man nach der von J.L. Lagrange stammenden Methode der Variation der Konstanten gewinnen. Dabei suchen wir die Lösung von (34) in der Form

$$(36) \quad \vec{f} = \mathfrak{X} \vec{y},$$

wobei  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(x)$  die Lösung der Gleichung

$$(37) \quad \frac{d\mathfrak{X}}{dx} = A(x)\mathfrak{X} \quad \mathfrak{X}(0) = I$$

darstellt. Setzen wir (36) in (34) ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{X}' \vec{y} + \mathfrak{X} \vec{y}' = A(x)\mathfrak{X} \vec{y} + \mathfrak{X} \vec{y}' = A(x)\mathfrak{X} \vec{y} + \vec{r}(x);$$

dennach gilt

$$\mathfrak{X} \vec{y}' = \vec{r}(x),$$

und es ist

$$\vec{y}' = \mathfrak{X}^{-1}(x) \vec{r}(x).$$

Nach Integration ergibt sich

$$\vec{y} = \int_0^x \mathfrak{X}^{-1}(t) \vec{r}(t) dt.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (36) ein, dann gelangen wir schließlich zu der Formel

$$(38) \quad \vec{r} = \int_0^x \alpha(x) \alpha^{-1}(t) \vec{r}(t) dt .$$

Die Formel (38) stellt die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (34) - (35) dar und kann im Rahmen unserer Betrachtungen zur Berechnung konkreter Grenzschichtströmungen von Zweikomponentenmedien benutzt werden. Je nach Gestalt des umströmten Körpers muß dabei zunächst die Geschwindigkeit  $U_0(x)$  in der Potentialströmung ermittelt werden. Ist diese bekannt, dann läßt sich die Impulsverlustdicke  $\sigma_i^{**}$  wegen (5) nach der Formel

$$(39) \quad \sigma_i^{**} = \sqrt{\frac{\nu_i \Theta_0}{U_0'}} \left( 1 + \frac{f_i}{\sqrt{\nu_i}} \right)$$

gewinnen. Mit Hilfe der Ergebnisse für  $H_i$  und  $\xi_i$  aus der Abb. 2 kann man dann gemäß (11)  $\sigma_i^*$  und  $\tau_w^{(i)}$  finden. Dabei ist

$$(40) \quad \tau_w^{(i)} = \mu_i \frac{U_0}{\sigma_i^{**}} \xi_i (\Theta_i) .$$

Lassen wir in (39) und (40)  $\varrho_1 \rightarrow \varrho_2$  und  $\nu_1 \rightarrow \nu_2$  streben, so erhalten wir die entsprechenden Formeln für die Grenzschichtströmung eines homogenen Mediums [3]. Zum Schluß sei angemerkt, daß die angegebenen Ergebnisse sich für solche Grenzschichtströmungen von Zweikomponentenmedien anwenden lassen, für die das Verhältnis  $\frac{\nu_1}{\nu_2}$  sich wenig von 1 unterscheidet.

Literatur

- [1] Рахматулин, Х.А., Основы гидродинамики  
взаимопроникающих движений сжимаемых  
сред, ПММ, т. XX, вып. 2, 1956
- [2] Szleża, J., Zur laminaren Grenzschichtströmung eines  
Zweiphasenmediums, Monatsberichte der DAW zu Berlin,  
Bd. 13, H.3, 1971
- [3] Лойцянский, Л.Г., Ламинарный пограничный  
слой, ФМ изд., М., 1962