

PYTHAGORAS VON SAMOS

(570 – 500 v. Chr.)



Den Satz des Pythagoras kennt fast jeder, aber eigentlich weiß man nur sehr wenig über die Person, deren Namen der berühmte Satz trägt. Von ihm sind keine Schriften überliefert; auch andere Quellen aus dieser Zeit fehlen. Berichte über sein Leben wurden erst Jahrzehnte nach seinem Tod verfasst, unter anderem von Herodot (484–424 v. Chr.) und von Aristoteles (384–322 v. Chr.), und die meisten Legenden entstanden erst Jahrhunderte später.

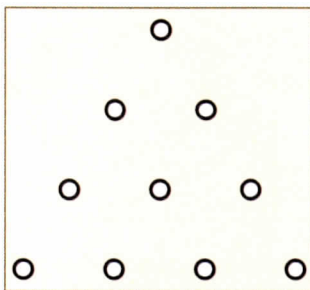
In vielen Darstellungen wird Pythagoras vor allem als Philosoph und religiöser Prophet beschrieben, weniger als Mathematiker. Oft ist in den Überlieferungen auch nur von den »Pythagoreern« die Rede, also der »Schule« des Pythagoras, so dass man nicht genau weiß, was von Pythagoras selbst stammt und was von seinen Schülern.

Ob Pythagoras der Sohn eines Gemmenschneiders war oder eines Kaufmanns, ist ebenso unklar wie der Zeitpunkt und die Dauer seiner Reisen nach Phönizien, Ägypten und Mesopotamien. Vermutlich lernte er

Thales von Milet (624–547 v. Chr., siehe S. 6) persönlich kennen – die Insel Samos liegt unmittelbar vor der kleinasiatischen Küste. Anaximander (611–546 v. Chr.), Schüler des Thales, war möglicherweise sein Lehrer.

Ob die sogenannten Harpedonapten (Seilspanner) in Ägypten und Mesopotamien den nach ihm benannten Satz bereits mehr als 1000 Jahre vor Pythagoras angewandt haben, ist unklar. Wir können jedoch davon ausgehen, dass Pythagoras das Wissen über diese aus der Praxis stammende Regel von dort nach Griechenland brachte. Sein Verdienst ist es, dass er »die Mathematik von diesen praktischen Anwendungen befreite« – Mathematik wurde betrieben, »um dem Göttlichen näher zu kommen« (B. L. van der Waerden).

Vermutlich um 530 oder 520 v. Chr. lässt sich Pythagoras in der griechischen Kolonie Kroton in Süditalien nieder und gründet dort einen Geheimbund. Die Sektenmitglieder glauben an die Unsterblichkeit der Seele. Dem Schicksal der Seelenwanderung und dem ewigen Kreislauf der Wiedergeburt kann man nur entgehen, wenn man sich mit den



Die Tetraktys: 10 ist die Summe der Zahlen von 1 bis 4.



Landvermessung,
Ägypten 1998



Griechenland 1955



Ausschnitt aus dem Gemälde Raffaels
»Schule von Athen«, Sierra Leone 1983

Mysterien der Zahlen und der Harmonie beschäftigt. Ihr Kosmos ist nach Zahlen geordnet; in diesem Sinn ist Mathematik ein Teil ihrer Religion. Pythagoras gilt unter seinen Jüngern, den Pythagoreern, als der vollkommene Weise; auf Pythagoras geht die Bezeichnung »Philosoph« zurück als »ein Mensch, der die Weisheit liebt«. Die Jünger leben nach strengen Ordensregeln; ihre asketische, vegetarische Lebensweise ist für manche Zeitgenossen Anlass zu Spott.

Die Pythagoreer beschäftigen sich mit Astronomie und Astrologie, mit Arithmetik und Musiktheorie. Nach den Lehren ihres Meisters ist der Weg zum Transzendenten nur durch die Beschäftigung mit den Eigenschaften der (natürlichen) Zahlen möglich, denn: »Alles ist Zahl«.

Die Eins ist keine eigentliche Zahl, aber Ausgangspunkt aller Zahlen. Die Zehn gilt als heilige Zahl; sie ist Summe der ersten vier Zahlen und Basis unseres Zahlensystems; außerdem lässt sie sich in Form eines gleichseitigen Dreiecks darstellen (Tetraktys = Vierheit; Bild S. 8 links).

Die Zahlen 1, 2, 3 und 4 spielen auch in der musikalischen Harmonik eine entscheidende Rolle: Wenn man die Länge einer Saite auf die Hälfte verkürzt, also im Verhältnis 2:1 verändert, dann liegt der neue Ton um eine Oktave höher, bei Verkürzung im Verhältnis 3:2 oder 4:3 um eine Quinte beziehungsweise Quarte.

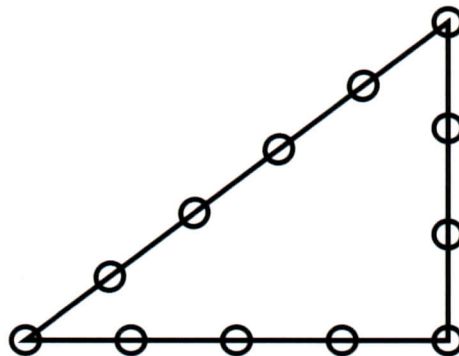
Zum Rechnen verwenden die Pythagoreer schwarze und weiße Steinchen, die zu geometrischen Figuren gelegt werden. Damit lassen sich Summenformeln ablesen, zum Beispiel für die Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, ungerader Zahlen oder gerader Zahlen (Bilder rechts). In den letzten beiden Mustern werden die Steinchen in Form von so genannten Gnomonen (Winkelhaken) gelegt.

Bei den Pythagoreern hat jede Zahl ihre eigene, mystische Persönlichkeit. Gerade Zahlen sind weiblich, ungerade sind männlich. Die Zahl 5 ist als Summe der kleinsten echten Zahlen, der kleinsten geraden und ungeraden Zahlen Symbol für die Ehe.

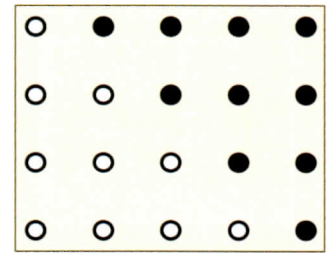
Die Zahl 6 ist gleich der Summe ihrer echten Teiler – eine vollkommene Zahl. Die Pythagoreer kennen die allgemeine Regel: Wenn die Summe $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$ eine Primzahl p ist, dann ist $2^n \cdot p$ eine vollkommene Zahl. Für den Beweis der Regel benötigt man die Summenformel für die geometrische Reihe, die schon den Babyloniern bekannt ist.

Die Zahl 16 ist nicht nur eine Quadratzahl; sie repräsentiert ein Quadrat der Seitenlänge 4 mit dem Umfang 16 (Längeneinheiten, LE) und dem Flächenmaß 16 (Flächeneinheiten, FE). Analog steht die Zahl 18 für das besondere Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 6 (Umfang = 18 LE, Flächenmaß = 18 FE).

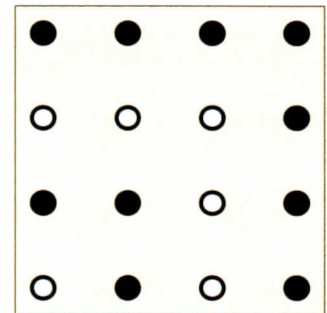
Dass rechtwinklige Dreiecke sich durch die Zahlenverhältnisse 3, 4 und 5 ausdrücken lassen, deutet für die Pythagoreer auf göttliche Fügung hin.



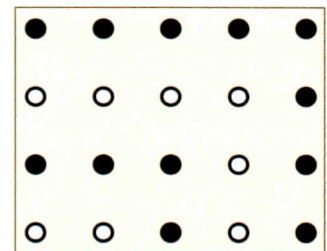
Wir wissen nicht, ob Pythagoras den nach ihm benannten Satz »beweisen« konnte – etwa so, wie es in den »Elementen« des Euklid nachzulesen ist.



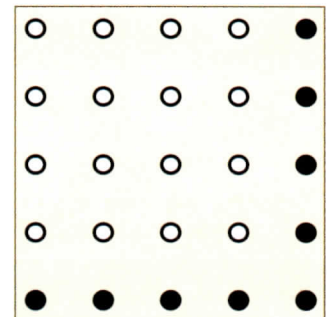
$$1 + 2 + \dots + n = n \cdot (n + 1) / 2$$



$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$



$$2 + 4 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1)$$



$4^2 + 3^2 = 5^2$: Das einfachste pythagoreische Zahlentripel, gelegt aus einem Quadrat und einem Winkelhaken



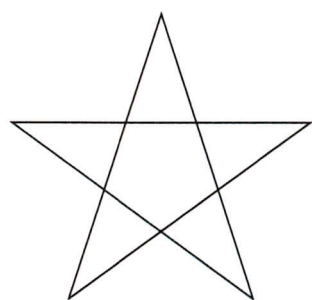
Satz des Pythagoras, Griechenland 1955



Surinam 1972



Nicaragua 1972



Bekannt ist ihm jedoch die Regel für besondere »pythagoreische« Zahlentripel:

Das Tripel (x, y, z) mit $x = m$; $y = (m^2 - 1)/2$; $z = (m^2 + 1)/2$, wobei m eine ungerade Zahl ist, erfüllt die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$.

Für $m = 3$ erhält man $3^2 + 4^2 = 5^2$, $m = 5$ führt zu $5^2 + 12^2 = 13^2$, $m = 7$ ergibt $7^2 + 24^2 = 25^2$...

Auch dies lässt sich an Mustern ablesen: Legt man um ein Quadrat von y^2 weißen Steinen einen Winkelhaken mit x^2 schwarzen Steinen, dann erhält man ein Quadrat mit $x^2 + y^2 = z^2$ Steinen (Bild S. 9 rechts unten).

Von den regulären Körpern kennt Pythagoras nur Tetraeder, Hexaeder (Würfel) und Dodekaeder.

Das Sternfünfeck (»Pentagramm«, Bild links) wird zum Erkennungszeichen der Pythagoreer. Die Diagonalen dieser symme-

trischen Figur schneiden einander nach dem »Goldenen Schnitt«. Etwa 50 Jahre nach dem Tod des Pythagoras wird – vermutlich durch seinen Schüler Hippias – bewiesen, dass diese Teilung zu inkomensurablen Strecken führt: Die Längen der Teile stehen nicht im Verhältnis ganzer Zahlen, die Zahlenverhältnisse sind also irrational – ein Schock für die Pythagoreer?

Aus einer mystischen Zahlenlehre entwickelt sich unter den Schülern des Pythagoras die Mathematik zur exakten Wissenschaft; viele Erkenntnisse werden in die »Elemente« des Euklid (365–300 v. Chr.) übernommen. Im Lauf eines Jahrhunderts jedoch zerfällt die Vereinigung der Pythagoreer wegen unterschiedlicher politischer Ansichten. Pythagoras selbst wird 510 v. Chr. aus Kroton vertrieben und siedelt sich im benachbarten Metapont an; er stirbt dort vermutlich um 500 v. Chr.

ARCHIMEDES VON SYRAKUS

(287 – 212 v. Chr.)



Archimedes gilt als der bedeutendste Mathematiker und Physiker des Altertums. Seine Werke, die durch arabische Wissenschaftler auch in Europa wieder bekannt wurden, gaben Anregungen für Johannes Kepler, Isaac Newton (S. 44), Gottfried Wilhelm Leibniz (S. 48) und viele andere.

Über sein Leben ist nur wenig bekannt: Archimedes wird in Syrakus, einer griechischen Stadt auf Sizilien, geboren; sein Vater ist Phidias, ein Astronom. Er studiert in Alexandria (Ägypten), dem damaligen Wissenschaftszentrum der hellenistischen Welt. Während des Zweiten Punischen Kriegs kommt er bei der Eroberung der Stadt Syrakus, die mit Karthago gegen Rom verbündet ist, gewaltsam ums Leben. »Noli turbare circulos meos«

(»Störe meine Kreise nicht«), sollen seine letzten Worte gewesen sein.

Archimedes wird insbesondere durch seine wissenschaftlichen Entdeckungen und Erfindungen berühmt:

Er formuliert das Hebelgesetz (Bild links) und baut »einfache Maschinen« wie den Flaschenzug oder die Archimedische Schraube (Bild rechts), mit der man Wasser auf ein höheres Niveau befördern kann, erfindet aber auch Kriegsmaschinen für die Verteidigung der von den Römern über zwei Jahre belagerten Heimatstadt.

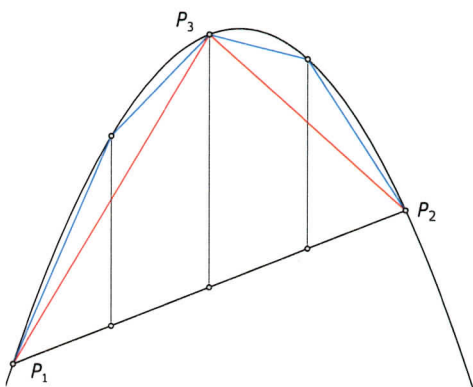
Ob Archimedes das Prinzip des Auftriebs tatsächlich beim Baden entdeckt hat und daraufhin im Adamskostüm jubelnd durch die Straßen stürmte, wie die Legende berichtet, mag dahingestellt sein; sein Jubelruf »Heure-

ka« (»Ich habe es gefunden«) wird seitdem als geflügeltes Wort verwendet, wenn ein schwieriges Problem gelöst ist.

Wird ein Körper in eine Flüssigkeit eingetaucht, dann erfährt er eine Auftriebskraft, die gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge ist. Dieses Phänomen wird heute noch nach seinem Entdecker archimedisches Prinzip genannt.

Von seinen zahlreichen Schriften sind nur wenige teilweise erhalten; es war daher eine echte Sensation, als 1906 in einem Palimpsest (einem abgeschabten und neu beschriebenen Pergament) ein Text von ihm gefunden wurde. Dieser enthielt Auszüge aus verschiedenen Werken, darunter die Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegments, die Volumen- und Oberflächenberechnungen bei Kugel, Kegel, Zylinder, Rotationsparaboloid, Ellipsoid und von Segmenten dieser Körper sowie Schwerpunktbestimmungen bei diesen Körpern.

Bei vielen Herleitungen verwendet Archimedes das Hebelgesetz – ein Hinweis darauf, dass er zunächst Modelle dieser Körper mit physikalischen Methoden (Messen, Wägen) untersucht und an ihnen Eigenschaften entdeckt, diese aber anschließend exakt beweist, zum Beispiel, dass die Oberfläche einer Kugel genau viermal so groß ist wie die Fläche eines Großkreises. Stolz ist er auf die Entdeckung, dass das Volumen einer Kugel und das Volumen eines die Kugel einschließenden Zylinders im Verhältnis 2 : 3 stehen; er lässt die beiden Körper auf seinem Grabstein darstellen, wie Marcus Tullius Cicero im Jahr 75 v. Chr. berichtet.



Mit der Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegments bereitet Archimedes die Integralrechnung des 17. Jahrhunderts vor:

Gesucht ist der Inhalt der Fläche zwischen der Parabel und der Gerade durch die zwei Parabelpunkte P_1 und P_2 . Die Parallele zur Symmetrieachse der Parabel durch den Mittelpunkt der Sehne P_1P_2 schneidet die Parabel in P_3 . Die Punkte P_1 , P_2 , P_3 bilden ein Dreieck. Analog zeichnen wir Dreiecke über den

Sehnen P_1P_3 und P_2P_3 . Das Verfahren kann beliebig oft fortgesetzt werden; durch die unendliche Folge von Dreiecken wird die Fläche des Parabelsegments ausgeschöpft (»Exhaustionsverfahren«). Aus den Eigenschaften von Parabeln folgt, dass das erste Dreieck $P_1P_2P_3$ genau viermal so groß ist wie die beiden im nächsten Schritt gebildeten Dreiecke zusammen genommen.

Der Flächeninhalt des Parabelsegments errechnet sich also als unendliche Summe; Archimedes gibt hierfür den Wert $\frac{4}{3}A$ an, wobei A der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist.

Heute würden wir die Berechnung der unendlichen Summe so notieren:

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \dots = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}A$$

Archimedes argumentiert wie folgt: Hat man eine Folge von Zahlen $A, B, C, \dots, Z$, von denen jede viermal so groß ist wie die nachfolgende, dann gilt:

$$A + B + C + \dots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A \quad (*)$$

Zum Beweis rechnet er:

$$\begin{aligned} B + C + \dots + Z + \frac{1}{3}(B + C + \dots + Z) \\ &= \frac{4}{3}(B + C + \dots + Z) \\ &= \frac{1}{3}(A + B + C + \dots + Y) \end{aligned}$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \dots + \frac{1}{3}Y,$$

dann ergibt sich

$$B + C + \dots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{1}{3}A$$

und hieraus Gleichung (*).

Bemerkenswert erscheint die Erkenntnis des Archimedes, dass die Differenz zwischen dem Grenzwert der unendlichen Summe und einer beliebigen endlichen Teilsumme gerade gleich einem Drittel des letzten Summanden beträgt!

Archimedes entwickelt auch einen Algorithmus zur Berechnung von π : Die Idee, den Einheitskreis durch regelmäßige Vielecke ein- und umzubeschreiben, war bereits vor ihm bekannt. Durch den von ihm gewählten Übergang vom regelmäßigen n -Eck zum $2n$ -Eck gelingt es ihm, den Wert von π einzuschachteln.

Mit Hilfe geometrischer Überlegungen findet er für den Umfang U_{2n} des umbeschrie-



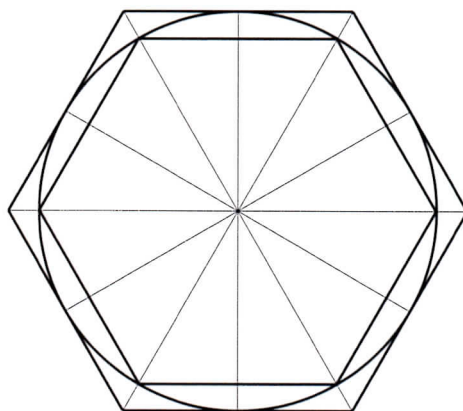
benen und den Umfang u_{2n} des einbeschriebenen $2n$ -Ecks Folgendes heraus:

$$U_{2n} = \frac{2 \cdot U_n \cdot u_n}{U_n + u_n}$$

(harmonisches Mittel) und

$$u_{2n} = \sqrt{U_{2n} \cdot u_n}$$

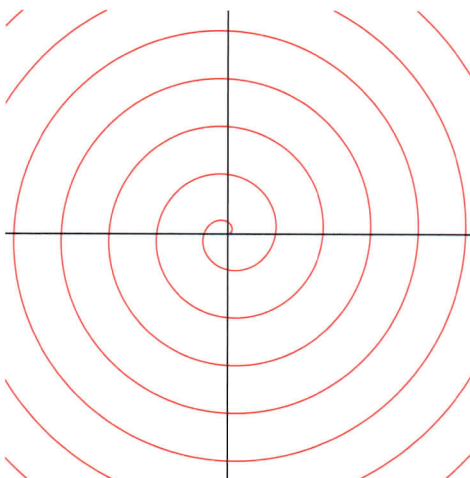
(geometrisches Mittel).



Beginnend mit einem regelmäßigen 6-Eck, also $u_6 = 6$, $U_6 = 4 \cdot \sqrt{3}$, rechnet er weiter bis zum regelmäßigen 96-Eck, wobei er die Quadratwurzeln durch geeignete Brüche approximiert. Dies führt schließlich zu der Abschätzung

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

Wesentlich bei der Argumentation, dass man eine Fläche durch Ausschöpfung oder durch Überdeckung bestimmen kann, ist ein Grundsatz, der heute als archimedisches Axiom bezeichnet wird: Zu je zwei Größen kann man ein Vielfaches der einen Größe bilden, so dass dieses größer ist als die andere Größe.



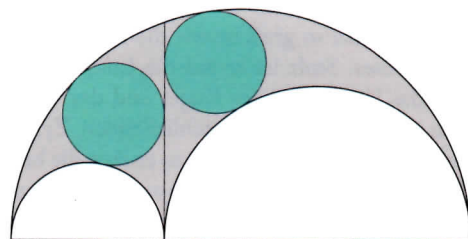
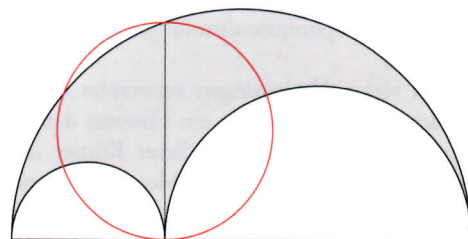
Als Archimedische Spirale bezeichnet man eine ebene Kurve, die entsteht, wenn sich ein Punkt auf einem vom Ursprung ausgehenden

Strahl mit konstanter Geschwindigkeit a vom Ursprung fortbewegt und zugleich dieser Strahl sich mit konstanter Geschwindigkeit 1 um den Ursprung dreht. Die Punkte der Kurve lassen sich durch eine Parametergleichung mit der Variablen φ beschreiben:

$$(x, y) = (a\varphi \cos(\varphi), a\varphi \sin(\varphi))$$

Archimedes bestimmt den Inhalt der Fläche, die der Strahl nach einer Umdrehung überdeckt hat; er ist gerade gleich einem Drittel der Fläche des umschließenden Kreises.

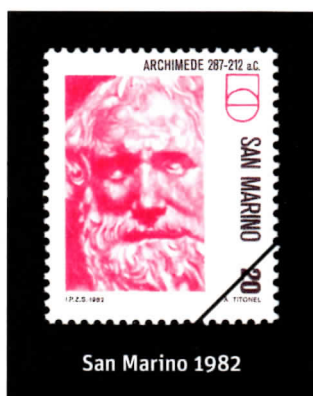
Auch beschäftigt sich Archimedes mit einer besonderen Kreisfigur, dem Arbelos (»Schustermesser«), und beweist, dass die Fläche eines Arbelos gerade so groß ist wie die eines Kreises, dessen Durchmesser durch die eingezeichnete »Höhe« gegeben ist.

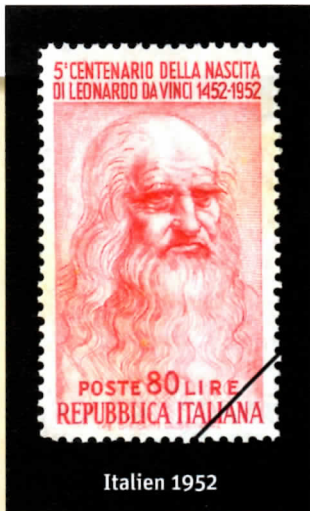


Bemerkenswert ist auch, dass die kleineren Halbkreisbögen eines Arbelos zusammen genauso lang sind wie der große Halbkreisbogen und dass die im Arbelos links und rechts von der »Höhe« gerade hineinpassenden Kreise genau gleich groß sind (»Zwillingskreise des Archimedes«).

Zu den arithmetischen Schriften des Archimedes gehört der »Sandrechner«, in dem er das bis dahin übliche Zahlensystem über die Myriade ($=10^4$) hinaus erweitert; mit Hilfe dieser Darstellung gibt er einen Schätzwert für die Anzahl der Sandkörner an, mit denen man eine Kugel von der Größe der Erde füllen könnte; die Größe des Weltalls schätzt er auf ein Volumen von (in unserer Schreibweise) 10^{64} Sandkörnern.

Schließlich beschäftigt sich Archimedes auch mit regelmäßigen Körpern; die 13 Körper, deren Oberfläche sich aus verschiedenen regelmäßigen Vielecken zusammensetzt, werden heutzutage ihm zu Ehren als archimedische Körper bezeichnet.





LEONARDO DA VINCI

(15. 4. 1452 – 2. 5. 1519)

Leonardo wird als unehelicher Sohn des Notars Messer Piero und der Bauernmagd Caterina in der Nähe von Vinci, einem Dorf bei Florenz, geboren. Seine Eltern gehen keine Ehe miteinander ein, vielmehr heiraten sie jeweils andere Partner. Er wächst im Haus seines Vaters auf und wird wie die ehelichen Kinder des Vaters behandelt; er lernt ein wenig schreiben, lesen und rechnen. Der Vater bemerkt jedoch früh die künstlerischen Fähigkeiten seines Sohnes.

Als angesehener Bürger der Stadt Florenz kann er seinem 15-jährigen Sohn eine Lehrstelle in der Werkstatt von Andrea del Verrocchio (1435/36–1488) vermitteln. Hier lernt Leonardo die grundlegenden Techniken der Malerei und Bildhauerei. Mit 20 Jahren wird er zwar bereits in die Gilde der Maler aufgenommen, versteht sich aber bis zu seinem 25. Lebensjahr als Lernender. In dieser Zeit entstehen zahlreiche Feder- und Bleistiftzeichnungen, auch von technischen Geräten.

Mit 30 Jahren tritt er in den Dienst von Ludovico Sforza, dem Herzog von Mailand, ein; im Verzeichnis der Bediensteten wird er als Maler und Ingenieur geführt. Er erhält

Aufträge für die Anfertigung von Gemälden, Altarbildern, Wandmalereien (darunter das berühmte »Letzte Abendmahl«), wird um technischen Rat gefragt, auch für den Bau von Befestigungsanlagen. Sein größtes Projekt, ein fünf Meter hohes Reiterdenkmal von Francesco Sforza, dem Gründer der Dynastie, aus Bronze gießen zu lassen, kann er 1499 nicht mehr realisieren, weil das Metall für den Guss von Kanonen zur Verteidigung der belagerten Stadt Mailand benötigt wird.

Im Jahr der Entdeckung Amerikas (1492) fertigt er die berühmte Zeichnung eines Mannes an, durch den die menschlichen Proportionen veranschaulicht werden (siehe die Briefmarken auf S. 28/29).

Die Idee hierzu geht auf den römischen Architekten Marcus Vitruvius Pollio (um 30 v. Chr.) zurück. Heute steht diese Figur als Symbol für wissenschaftliche Forschung und wird auch von zahlreichen Organisationen verwendet.

In den letzten Jahren in Mailand beschäftigt er sich intensiv mit dem Buch Piero della Francescas (um 1420–1492) zur Perspektive.

Er lernt den Mathematiker und Franziskaner Luca Pacioli kennen und wird durch



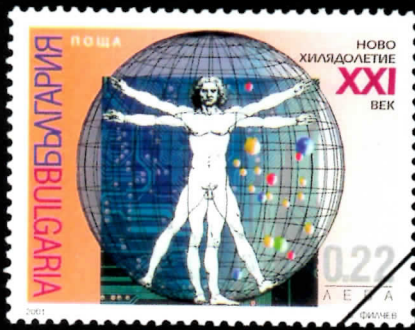
Genua, 500-Jahr-Feier der Entdeckung Amerikas, Italien 1992



Italien 1938

Piero della Francesca, San Marino 1992





Bulgarien 2001



Polen 1999



Monaco 2000



Mexiko 1977



Japan 1979



San Marino 2006



Vereinte Nationen 1972



Luxemburg 1986

dessen 1494 erschienenes Buch »Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità« (»Zusammenfassende Darstellung über Arithmetik, Geometrie und Algebra«), angeregt, sich intensiv mit Euklids Geometrie zu beschäftigen.

Leonardos Skizzenbücher aus dieser Zeit sind gefüllt mit Konstruktionsansätzen zur Quadratur des Kreises und zur Würfelverdopplung. Er erfindet einen Proportionalzirkel, mit dem man Figuren zeichnen kann, die zur ursprünglichen ähnlich sind.

»Non mi legga chi non e matematico«, schreibt er in sein Skizzenbuch. »Niemand darf dies lesen, der kein Mathematiker ist!« Leonardo äußert die Überzeugung, dass es nur dann sichere Erkenntnisse in den Wissen-

schaften geben kann, wenn dabei Mathematik eine Rolle spielt.

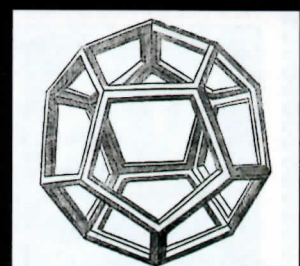
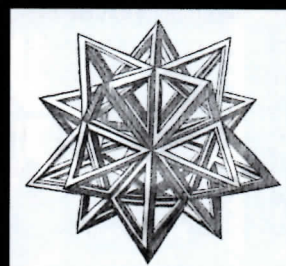
Für Pacioli's zweites Mathematikbuch »De divina proportion« (»Über das göttliche Verhältnis«, heute als goldener Schnitt bezeichnet), fertigt er 60 Zeichnungen an.

Nach der Besetzung Mailands durch französische Truppen reist Leonardo mit Luca Pacioli nach Mantua und Venedig, schließlich nach Florenz, wo der mittlerweile berühmte Künstler mit großen Ehren empfangen wird. Unentwegt beschäftigt er sich mit geometrischen Problemen; er findet einen einfachen, genialen Beweis für den Satz des Pythagoras.

Lange hält er es nicht in Florenz aus; ihn reizt das Angebot von Cesare Borgia, dem Sohn von Papst Alexander VI. und mäch-



Luca Pacioli, Italien 1994



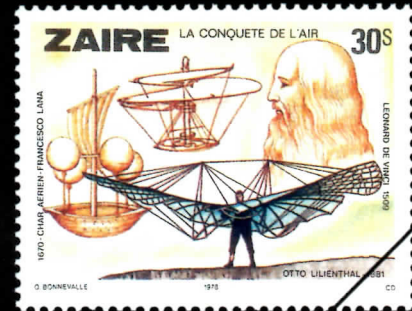
Geometrische Körper, gezeichnet von Leonardo für Luca Pacioli's »De divina proportion«



Kuba 1970



Mazedonien 2002



Zaire 1978



San Marino 2006



Kuba 1996



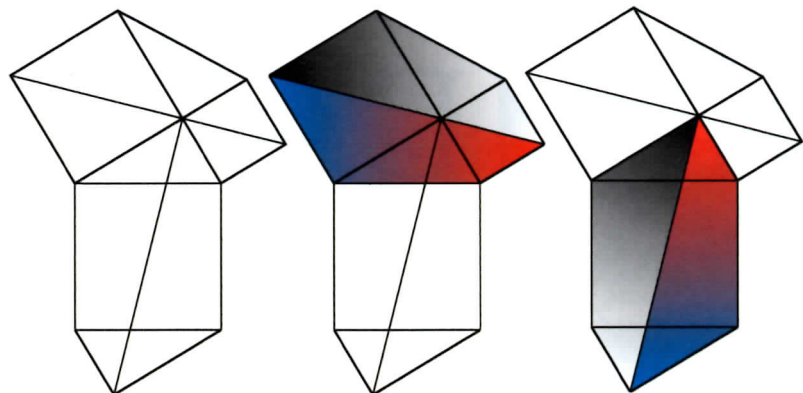
Frankreich 1952

tigstem Befehlshaber in Italien, in seinen Diensten als Militärarchitekt und Ingenieur tätig zu werden. Er reist durch die päpstlichen Ländereien und fertigt Stadtpläne und topografische Karten an, deren Perfektion heute noch erstaunen.

Wieder zurückgekehrt nach Florenz, stellt er Pläne auf, wie der Fluss Arno so umgeleitet werden könne, dass dieser nicht mehr durch Pisa verläuft, sondern Florenz direkt mit dem Meer verbindet.

In einem Krankenhaus beginnt er seine intensiven anatomischen Studien über die Struktur und die Funktionsweise des menschlichen Körpers, indem er heimlich Leichen seziiert. Leonardo bezeichnet die Natur als seinen Lehrmeister; er beobachtet systematisch den Flug von Vögeln, untersucht die physikalischen Eigenschaften von fließendem Wasser und vergleicht sie mit denen der Luft.

Seine Ideen und Beschreibungen notiert Leonardo in Spiegelschrift; eine mögliche Erklärung ist, dass ihm dies als Linkshänder leichter fällt, eine andere, dass er andere daran hindern möchte, seine Notizen zu lesen – einen Schutz vor geistigem Diebstahl gibt es nicht. Für die zweite Erklärung spricht auch die Tatsache, dass er absichtlich Fehler in Konstruktionsbeschreibungen der von ihm erfundenen Maschinen einbaut, so dass sie nicht funktionieren.



Rastlos übernimmt er Aufträge für Gemälde, Arbeiten als Architekt und Ingenieur und erfindet mechanisches Spielzeug. Sein ungezügelter Forschungsdrang verhindert jedoch oft den Abschluss der begonnenen Arbeiten. Er pendelt zwischen Florenz und Mailand, bis die französische Herrschaft dort beendet ist.

In Rom tritt er in die Dienste des regierenden Medici-Papstes ein; dieser bevorzugt jedoch Raffael und Michelangelo. Gekränkt nimmt Leonardo das großzügige Angebot des französischen Königs Franz I. an und lässt sich in Amboise nieder.

Nach seinem Tod hinterlässt der Künstler, Naturforscher und Erfinder viele tausend Seiten mit Notizen, deren Genialität erst im 19. und 20. Jahrhundert deutlich wird.

Leonardo da Vincis Idee
zum Beweis des Satzes
von Pythagoras

RENÉ DESCARTES

(31.3. 1596 – 11.2. 1650)



Die französische Briefmarke von 1937 zeigt im Vordergrund den Mathematiker und Philosophen René Descartes, vor seinem berühmtesten Werk »Discours de la méthode«. Bei dieser Briefmarke kam es zu einer Panne: Der Grafiker hatte den Titel des Werks falsch im Kopf (»Discours sur la méthode«), und es dauerte ein paar Tage, bis der Fehler bemerkt wurde. Da relativ viele »falsche« Briefmarken (links) verkauft wurden, sind diese Fehldrucke heute nicht mehr wert als die »richtigen«.

Ähnliche Unkenntnis zeigte auch der Grafiker der albanischen Briefmarke (Bild links), der die latinisierte Fassung des Namens, Renatus Cartesius, falsch abschrieb ...

Der Vater von René Descartes ist Jurist am Obersten Gerichtshof der Bretagne. Die Mutter stirbt, als René ein Jahr alt ist; bis zum Alter von acht Jahren lebt er bei seiner Großmutter, dann kommt er in das Internat des Jesuitenkollegs in La Flèche. Wegen seiner schlechten Gesundheit genießt er dort das Privileg, bis 11 Uhr morgens im Bett bleiben zu dürfen, eine Gewohnheit, die er zeit seines Lebens nicht ändert.

Einer seiner Lehrer ist Marin Mersenne (1588–1648), mit dem ihn eine lebenslange Freundschaft verbindet. Nach einem Studium der Rechte tritt er vorübergehend in den Militärdienst ein und nimmt an den ersten Feldzügen des beginnenden Dreißigjährigen Kriegs teil.

Eine unruhige »Reisezeit« durch Europa beginnt: Er reist durch Böhmen, Ungarn, Deutschland, Holland, Italien und wieder nach Frankreich und sucht Kontakt zu den größten Wissenschaftlern seiner Zeit. 1628 lässt er sich – wegen der erhofften größeren Gedankenfreiheit – im mittlerweile republikanischen Holland nieder und beginnt ein Werk, das den Titel »Traité du monde« (»Ab-

handlung über die Welt«) erhalten soll, bricht die Arbeit aber wieder ab, als er von den Problemen erfährt, die Galilei mit der Inquisition hat.

Schließlich überreden seine Freunde ihn, seine philosophischen Gedanken zu veröffentlichen. 1637 endlich erscheint – zunächst anonym – sein »Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences« (»Abhandlung über die Methode, seine Vernunft richtig zu gebrauchen und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen«) mit drei Anhängen »La Dioptrique« (»Über die Lichtbrechung«), »Les Météores« (»Über die Meteore«) und »La Géométrie«.

1641 folgen dann noch die »Meditationes« mit dem berühmten Satz »Cogito, ergo sum« (»Ich denke, also bin ich«), zunächst in lateinischer, später auch in französischer Sprache. Der vollständige Titel lautet auf Deutsch: »Meditationen über die erste Philosophie, in der die Existenz Gottes und die Unsterblichkeit der Seele bewiesen wird«.

Descartes' Methode des wissenschaftlichen Denkens enthält folgende Regeln:

- Halte nichts für wahr, was in Zweifel gezogen werden kann.
- Zerlege schwierige Probleme in Teilprobleme; beginne beim Einfachen und schreite zum Schwierigen fort; prüfe, ob die Untersuchung vollständig ist.

Er ist der Überzeugung, dass alle Naturerscheinungen rational erfasst und erklärt werden können; beispielsweise gibt er eine korrekte Erklärung für das Zustandekommen eines Regenbogens. Descartes formuliert als Erster den Impulserhaltungssatz, erklärt die Entstehung des Sonnensystems durch einen von Gott in Bewegung gesetzten Materiewirbel, aus dem dann die Sonne, die Planeten und die Kometen entstanden sind. Seine The-



Kartesisches Blatt

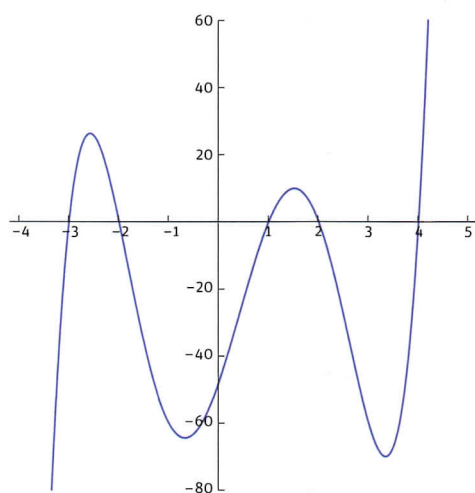
orien lassen jedoch keine Wechselwirkungen ohne materiellen Kontakt zu; das schließt auch Magnetismus und Gravitation aus.

Descartes' Auffassungen stehen im Gegensatz zum bis dahin unangetasteten Weltbild des Aristoteles; seine physikalischen Theorien sind jedoch weit gehend spekulativ und werden nur allmählich durch die newtonsche Physik verdrängt, die auf der naturwissenschaftlichen Methode der Beobachtung und der wissenschaftlichen Deduktion beruht.

1649 folgt Descartes einer Einladung der schwedischen Königin Christine nach Stockholm, wo er mit seiner Gewohnheit brechen muss, lange im Bett zu bleiben, da die Königin ihn um 5 Uhr zum Frühstück erwartet, um mit ihm über mathematische und philosophische Probleme zu diskutieren. Descartes überlebt den ersten nordischen Winter nicht; er zieht sich bei den frühen Spaziergängen zur Königin eine Lungenentzündung zu und stirbt kurze Zeit später.

Mit dem Werk »La Géométrie« wird ein neues Gebiet der Mathematik, die analytische Geometrie, geboren: Descartes zeigt auf, dass sich algebraische Gleichungen durch geometrische Konstruktionen lösen und geometrische Objekte durch algebraische Gleichungen beschreiben lassen. Auch wenn er das nach ihm benannte kartesische Koordinatensystem noch nicht so kennt, wie wir es heute benutzen, revolutionieren seine Ansätze die Mathematik: Geometrie und Algebra ergänzen einander und sind seit Descartes untrennbar miteinander verbunden.

Als erster Mathematiker benutzt er durchgehend die Rechenzeichen »+« und »-«, die Potenzschreibweise sowie das Wurzelzeichen (allerdings noch nicht das Gleichheitszeichen) und verwendet konsequent die letzten Buchstaben des Alphabets als Variablen.



$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48$$

Außer dem rechtwinkligen Koordinatensystem trägt auch eine Kurve seinen Namen: das kartesische Blatt (Bild ganz links unten). Deren Gleichung lautet:

$$x^3 + y^3 = 3axy,$$

in Parameterform lässt sich die Kurve durch

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \text{ und } y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

beschreiben. Wenn t von -1 bis 0 läuft, entsteht der linke Ast, die Schleife für t von 0 bis $+\infty$, für t von $-\infty$ bis -1 der rechte Ast. Für $t = -1$ ist die Parameterdarstellung nicht definiert.

Descartes entdeckt auch eine Vorzeichenregel für Polynome, die eine Beziehung herstellt zwischen der Anzahl der Nullstellen eines Polynoms und deren Koeffizienten: Die Anzahl der positiven Nullstellen ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Zahlenfolge der Koeffizienten oder um eine gerade Anzahl geringer. Sind alle Nullstellen reell, gilt die Gleichheit. Der Beweis der Regel erfolgt erst später durch Carl Friedrich Gauß (S. 67).

Als Beispiel betrachte man das Polynom $f(x) = x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48$ (Bild links unten). Die Folge der Koeffizienten $+1, -2, -15, +20, +44, -48$ hat drei Vorzeichenwechsel, nach der kartesischen Vorzeichenregel hat f maximal drei positive Nullstellen. Um die negativen Nullstellen zu finden, betrachtet man das Polynom

$$f(-x) = -x^5 - 2x^4 + 15x^3 + 20x^2 - 44x - 48;$$

die Koeffizientenfolge hat zwei Vorzeichenwechsel, also das Polynom maximal zwei negative Nullstellen.

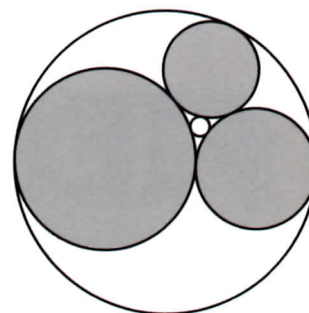
Von Descartes stammt auch der Vier-Kreise-Satz über apollonische Kreise (Bild rechts oben; siehe auch Spektrum der Wissenschaft 11/2002, S. 116): Welchen Radius r_4 hat ein Kreis, der drei einander berührende Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3 ebenfalls berührt? Descartes entdeckt den einfachen Zusammenhang

$$2 \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2,$$

wobei

$$k_i = \pm \frac{1}{r_i}$$

die Krümmung der Kreise angibt (negatives Vorzeichen für k_4 , wenn der vierte Kreis die anderen drei von außen berührt). Um r_4 zu bestimmen, genügt es, eine quadratische Gleichung mit der Variablen k_4 zu lösen!



Die Aufgabe, zu drei einander berührenden Kreisen (grau) einen vierten zu finden, der alle drei berührt, hat im Allgemeinen zwei Lösungen.



Frankreich 1996



Monaco 1996



Grenada 2000

PIERRE DE FERMAT

(1607/1608 – 12. 1. 1665)



Frankreich 2001

Im Jahr 2001 gab die französische Post anlässlich des 400. Geburtstags von Pierre de Fermat die oben abgebildete Briefmarke heraus. Sein genaues Geburtsdatum lässt sich allerdings wohl nicht mehr ermitteln: Zwar existiert eine Eintragung im Taufregister von Beaumont-de-Lomagne (nahe Toulouse) vom 20. August 1601 über die Taufe eines Pierre Fermat, aber nach der Inschrift seines Grabs in Toulouse starb er am 12. Januar 1665 im Alter von 57 Jahren, muss also 1607 oder 1608 geboren sein.

Der wohlhabende Lederhändler Dominique Fermat ist in erster Ehe mit Françoise Cazeu neu verheiratet; 1601 wird ihnen ein Kind namens Pierre geboren. Nach dem Tod seiner ersten Ehefrau heiratet Dominique Fermat Claire de Long. Vermutlich ist Pierre schon früh gestorben, und einer der in der neuen Ehe geborenen Jungen erhält denselben Vornamen wie sein Halbbruder.

Nach dem Besuch der örtlichen Schule der Franziskaner besucht Pierre Fermat die Universitäten in Toulouse und Bordeaux, mit großem Interesse an mathematischen Themen. In Orléans schließt er ein Jurastudium an; 1631 wird er als Anwalt in Toulouse zugelassen. Zum Conseiller au Parlement (Gericht) ernannt, kümmert er sich um Petitionen der Bürger an die Regierung in Paris. Wegen der Bedeutung des Amtes darf er sich jetzt »de Fermat« nennen. Im Lauf der Jahre bekleidet er verschiedene Ämter am obersten Gerichtshof in Toulouse; seine berufliche Tätigkeit dient ihm zur Sicherung seines Lebensunterhalts. In einem internen Bericht wird der Jurist Fermat als gelehrt, aber gelegentlich als verwirrt und gedankenverloren beschrieben. Dass er dennoch in höhere Ämter befördert wird, liegt an seiner Unbestechlichkeit und daran, dass viele Juristen am Gerichtshof Opfer einer Pestepidemie werden.

Was Fermat von seinen Dienstaufgaben ablenkt, ist die Mathematik. Schon als Student versucht er, aus Andeutungen und Zitaten die verloren gegangene Schrift »De locis planis« des Apollonius von Perge (um 260–190 v. Chr.) zu rekonstruieren. In seiner Abhandlung »Ad locos planos et solidos isagoge« bringt er – noch vor Descartes – wesentliche Gedanken der analytischen Geometrie:

Die Ideen François Viètes (1540–1603) aufgreifend, löst er geometrische Probleme mit algebraischen Mitteln. Er beschreibt Kurven in der Ebene durch Gleichungen mit zwei Variablen in einem Koordinatensystem und die Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel) durch Gleichungen 2. Grades.

1636 nimmt er Kontakt zu den in Paris lebenden Mathematikern um den Mönch Marin Mersenne (1588–1648) auf und legt ihnen Probleme vor, für die er selbst eine Lösung gefunden hat. Trotz wiederholter Aufforderung nimmt er sich jedoch nie die Zeit, die von ihm entwickelten Verfahren auszuarbeiten. Seine Schrift »Methodus ad disquirendam maximam et minimam« zur Bestimmung von Tangenten an Kurven, von Extremwerten und von Flächen unter den Graphen der Potenzfunktionen (»fermatsche Parabeln« $y = x^n$ und »fermatsche Hyperbeln« $y = 1/x^n$) ist für viele unverständlich. Newton (1643–1727) nennt die Abhandlung »eine inspirierende Quelle«; Laplace (1749–1827) sieht in Fermat (in nationaler Begeisterung) den wahren Erfinder der Differenzialrechnung.

Zu den von Fermat gelösten Extremwertproblemen zählt auch: In welchem Punkt im Innern eines Dreiecks mit Winkeln unter 120° ist die Summe der Entfernungen zu den drei Eckpunkten minimal? Für diesen Fermat-Punkt gilt: Die Verbindungsstrecken zu den drei Eckpunkten bilden stets Winkel von 120° zueinander (Bild rechts oben).

Fermatsche Vermutung,
Tschechien 2000

Fermat kritisiert die Abhandlung von René Descartes (S. 34) zur Optik als fehlerhaft, was dessen wütende Kritik hervorruft – er erkennt in Fermat einen mindestens ebenbürtigen Rivalen. 20 Jahre später greift Fermat erneut das Problem der Lichtbrechung auf und leitet ein grundlegendes Gesetz der Optik her, das den Weg eines Lichtstrahls beim Übergang zwischen zwei Medien beschreibt: Das Licht wählt den »schnellsten«, nicht den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten A und B (Bild rechts).

Von 1643 bis 1654 hat Fermat wegen eines Bürgerkriegs und der Pestepidemie keine Kontakte zu den Mathematikern in Paris. Angeregt durch die »Arithmetica« des Diophantos (um 250 n. Chr.) vertieft er sich in ein Gebiet, für das die Mathematiker seiner Zeit wenig Interesse zeigen: Zahlentheorie.

Fünf Jahre nach seinem Tod entdeckt sein Sohn Clément-Samuel auf dem Rand einer kommentierten Diophant-Übersetzung des Bacher de Méziriac (1581–1638) den Satz, der später als »fermatsche Vermutung« oder »Fermats letzter Satz« bezeichnet wird: »Die diophantische Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit natürlichen Zahlen x, y, z hat keine Lösung für natürliche Zahlen $n > 2$.« Statt einer Beweisidee notiert er den berühmten Satz: »*Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*« (»Ich habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, aber dieser Rand ist zu schmal, ihn zu fassen.«)

Man kann davon ausgehen, dass Fermat sich irrte; viele Mathematiker bemühten sich um den Beweis, der erst 1995 Andrew Wiles mit großem Aufwand gelang.

Fermat geht auf den Satz in allgemeiner Fassung später nicht mehr ein, was vielleicht darauf hindeutet, dass er seinen Irrtum erkannt hat. Er selbst beweist den Satz für den Spezialfall $n = 4$ nach der von ihm entwickelten Methode des unendlichen Abstiegs (*descente infinie*): Angenommen, es gäbe eine Lösung (x, y, z) für die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ mit natürlichen Zahlen x, y und z ; dann konstruiert er daraus eine weitere Lösung (x_1, y_1, z_1) mit $x_1 < x, y_1 < y, z_1 < z$, und durch Wiederholung dieser Methode eine unendliche Folge von immer kleiner werdenden Lösungstriplets – was im Widerspruch zur Beschränktheit der natürlichen Zahlen nach unten steht.

Blaise Pascal (S. 40) bietet Fermat 1654 in einem Brief um Bestätigung seiner eigenen Ideen zur Lösung zweier Probleme, die ihm der Chevalier de Méré vorgelegt hat:

► Warum lohnt es sich beim vierfachen Würfeln, darauf zu wetten, dass mindestens

eine Sechs fällt, aber nicht darauf, dass beim 24-fachen Würfeln mit zwei Würfeln mindestens ein Sechser-Pasch auftritt? (»Problème des dés«)

► Bei einem Glücksspiel zweier Spieler über mehrere Runden gewinnt derjenige den gesamten Spieleinsatz, der als Erster eine bestimmte Punktzahl erreicht. Das Spiel muss bei einem gewissen Zwischenstand abgebrochen werden. Wie ist die gerechte Aufteilung des Spieleinsatzes? (»Problème des partis«)

Dieser Briefwechsel gilt als die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Fermat versucht vergeblich, Pascal auch für Probleme der Zahlentheorie zu interessieren. Eine Fülle solcher Probleme stellt er seinen Briefpartnern in Europa, zum Beispiel: »Finde alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $Nx^2 + 1 = y^2$ ($N \in \mathbb{N}$)« oder: »Weise nach, dass die Gleichung $x^2 + 4 = y^3$ genau zwei Lösungen, die Gleichung $x^2 + 2 = y^3$ genau eine Lösung hat.«

Er entdeckt, dass sich Primzahlen der Form $4n+1$ eindeutig als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen ($5 = 2^2 + 1^2$; $13 = 3^2 + 2^2$; $17 = 4^2 + 1^2$; $29 = 5^2 + 2^2$; ...) und dass dies für Primzahlen der Form $4n-1$ nicht möglich ist.

Ist p eine Primzahl und a eine ganze Zahl, die nicht durch p teilbar ist, dann lässt sich die Zahl $a^{p-1} - 1$ stets durch p teilen. Diese Tatsache, die heute als »kleiner fermatscher Satz« bezeichnet wird, nutzt er als Primzahltest.

Seine Vermutung, dass alle Zahlen der Form $p_n = 2^{2^n} + 1$, also

$$p_0 = 2^{2^0} + 1 = 3, p_1 = 2^{2^1} + 1 = 5, p_2 = 2^{2^2} + 1 = 17, \\ p_3 = 2^{2^3} + 1 = 257, p_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537, \dots$$

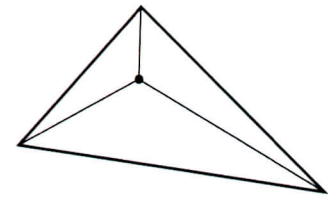
Primzahlen sind (so genannte fermatsche Primzahlen), erweist sich allerdings als falsch, wie 1732 Leonhard Euler als Erster herausfindet:

$$p_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

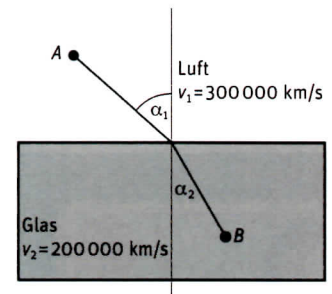
1643 entwickelt Fermat auch ein geniales Verfahren zur Faktorisierung großer Zahlen; in einem Brief an Mersenne demonstriert er es an der Zahl $n = 2027651281$. Der Algorithmus beginnt mit der kleinsten ganzen Zahl x , die größer als $\sqrt{n}$ ist.

Wenn $x^2 - n$ eine Quadratzahl y^2 ist, dann ist $n = (x-y) \cdot (x+y)$ eine Zerlegung, sonst überprüft man dies für die Zahl $x+1$.

Da Fermat nur wenige zusammenhängende Schriften verfasste, vielmehr seine vielen Ideen vor allem über die umfangreiche Korrespondenz verbreitete, wurde erst viele Jahre nach seinem Tod erkannt, welch bedeutender Mathematiker er war.



Der Fermat-Punkt eines Dreiecks



Fermatsches Prinzip: Unter allen Wegen von A nach B wählt das Licht den schnellsten. Das ist derjenige, für den das snelliussche Brechungsgesetz gilt:

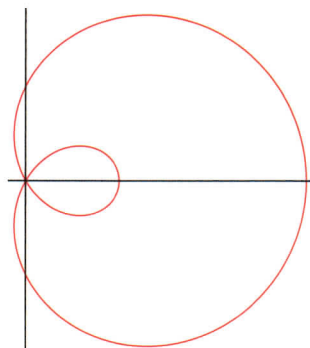
$$\sin(\alpha_1) / \sin(\alpha_2) = v_1 / v_2$$

BLAISE PASCAL

(19. 6. 1623 – 19. 8. 1662)



Frankreich 1962



Die pascalsche Schnecke hat in Polarkoordinaten die Darstellung $r = a \cos \varphi + b$; für dieses Bild gilt $a = 2$ und $b = 1$.



Frankreich 1944

Blaise Pascal wird als zweites Kind von Étienne Pascal, Richter am Steuergerichtshof in Clermont-Ferrand, geboren. Als die Mutter drei Jahre später stirbt, entscheidet sich der Vater, seine Kinder selbst zu unterrichten. 1632 verkauft er sein Richteramt und hofft, dass er mit dem Erlös ein Leben in Paris bestreiten kann.

Étienne Pascal selbst ist sehr an mathematischen Problemen interessiert; nach ihm wird eine besondere algebraische Kurve als »pascalsche Schnecke« bezeichnet (Bild links).

Er nimmt regelmäßig an den berühmten wissenschaftlichen »Gesprächsrunden« des Theologen, Musikwissenschaftlers und Mathematikers Marin Mersenne (1588–1648) teil; seinen kränklichen Sohn will er allerdings nicht mit Mathematik belasten. Zuerst soll der Latein und Griechisch lernen; aber Blaise stellt von sich aus so viele Fragen zur Geometrie, dass sein Vater ihn nicht länger von der Mathematik fernhalten kann.

Angeregt durch Beiträge von Girard Desargues (1591–1661) legt Blaise Pascal im Alter von 16 Jahren der mersenneschen Runde ein Papier über Kegelschnitte vor (»Essai pour les coniques«), das noch von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) erwähnt wird; es ist leider verloren gegangen.

Bedingt durch die Verluste, die dem französischen Staat durch den Dreißigjährigen Krieg (1618–1648) entstehen, verringert sich auch das Vermögen Étienne Pascals zusehends. Er übernimmt 1639 das Amt des Steuereintreibers für die Normandie. Sein Sohn Blaise entwickelt für die aufwändigen Additionen und Subtraktionen bei der Steuerberechnung eine mechanische Rechenmaschine. Das Modell kann er mehrfach verbessern; schließlich bewältigt »La Pascaline« sogar das Umrechnen zwischen den Einheiten der französischen Währung (1 livre = 20 sols; 1 sol = 12

deniers), jedoch arbeitet sie auf Grund mechanischer Probleme nicht immer zuverlässig.

Inspiziert durch Experimente von Evangelista Torricelli (S. 38), führt Blaise Pascal im Jahr 1646 zahlreiche Versuche durch, erkennt das Gesetz des hydrostatischen Gleichgewichts in Flüssigkeiten und das Prinzip der kommunizierenden Röhren, zeigt die Abnahme des Luftdrucks mit zunehmender Höhe und beweist die Existenz eines Vakuums (»Traité de vide«), die seit Aristoteles beharrlich bestritten wurde (*horror vacui*). Trotz der Eindeutigkeit der Ergebnisse lassen sich Zeitgenossen wie René Descartes (S. 34) nicht überzeugen; polemisch schreibt dieser in einem Brief an Christiaan Huygens, dass Pascal wohl »zu viel Vakuum in seinem Gehirn habe«.

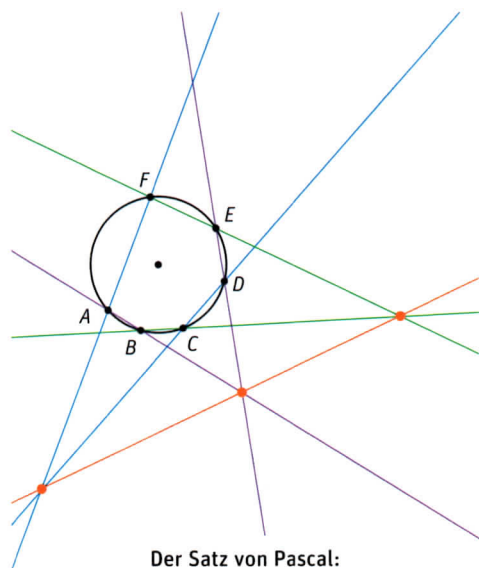
Im selben Jahr erleidet der Vater einen schweren Unfall und muss drei Monate lang von Ärzten betreut werden. Diese sind nicht nur medizinisch erfolgreich; sie gewinnen die gesamte Familie für die katholische Reformbewegung des Jansenismus. Blaise Pascal ist von dieser Zeit an tief religiös, beschäftigt sich jedoch zunächst noch weiter mit mathematischen Problemen; eine seiner Schwestern entschließt sich, in das Kloster der Jansenisten, Port-Royal in Paris, einzutreten.

Pascal greift 1647 noch einmal das Thema »Kegelschnitte« auf und formuliert unter anderem den Satz, der heute als »Satz von Pascal« bekannt ist:

In einem Sehnensechseck, dessen Ecken A, B, C, D, E, F Punkte eines Kegelschnitts sind, liegen die Schnittpunkte je zweier Paare von gegenüberliegenden Seiten (also AB und DE , BC und EF , CD und AF) auf einer Geraden.

Pascal zeigt, dass dieser Satz auch gilt, wenn die Punkte nicht in der alphabetischen Reihenfolge angeordnet sind.

Der Briefwechsel von Blaise Pascal mit Pierre de Fermat (S. 36) aus dem Jahr 1654,



Der Satz von Pascal:
Der Kegelschnitt ist hier ein Kreis.

ausgelöst durch den Chevalier de Méré, gilt als die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Pascal erkennt, dass man eher eine Sechse beim viermaligen Werfen eines Würfels (51,8 %) als einen Sechser-Pasch bei 24 Würfeln mit zwei Würfeln (49,1 %) erzielen kann; ihm erscheint dies allerdings unlogisch, da doch die Zahlenverhältnisse (4 zu 6 und 24 zu 36) gleich seien: »Die Arithmetik widerspricht sich selbst.«

Fermat und Pascal finden auch auf unterschiedlichen Wegen Lösungen für das Problem des Luca Pacioli: Wie ist der Einsatz zweier Spieler aufzuteilen, wenn ein Spiel vorzeitig abgebrochen werden muss?

Eine der Lösungen Pascals erfolgt durch rekursive Berechnung der Gewinnchancen:

Wenn ein Spiel, bei dem drei Punkte zum Sieg genügen, beim Spielstand von 2:1 abgebrochen wird, erhält der erste Spieler den gesamten Einsatz, wenn er den nächsten Satz gewinnt; wenn der zweite Spieler gewinnt, sind die Chancen wieder gleich groß. Daher stehen die Gewinnchancen wie 3 zu 1. Wenn bei einem Spielstand von 2:0 der erste Spieler den nächsten Satz gewinnt, erhält er den gesamten Einsatz; gewinnt der zweite Spieler, steht es 2:1, wofür die Chancen oben berechnet worden sind. Beim Stand von 1:0 kann der nächste Satz an den ersten Spieler gehen, und es steht 2:0, was schon berechnet wurde, oder an den zweiten Spieler, und beide haben gleiche Chancen zu gewinnen. So arbeitet man sich durch alle möglichen Spielstände.

Ein anderer Lösungsweg Pascals knüpft an seine Beschäftigung mit einem besonderen Zahlendreieck (»triangle arithmétique«) an; er zeigt, dass sich das Aufteilungsverhältnis aus den Zahlen dieses Dreiecks ablesen lässt.

Beispiel: Ein Spiel werde beim Punktstand von 3:2 abgebrochen; wer zuerst fünf Punkte erzielt, hat gewonnen.

Lösungsidee: Das Spiel hätte noch maximal vier Runden weitergehen können. Die fehlenden Spielrunden werden durch Münzwürfe ersetzt. In der Grafik rechts sind vier Runden dargestellt. Der Einfachheit halber wirft man sozusagen die Münze auch dann weiter, wenn das Spiel bereits entschieden ist. Zu den Endergebnissen nach vier Runden führen 1+4+6 beziehungsweise 4+1 Wege. Der Spieleinsatz ist also im Verhältnis 11:5 zwischen den Spielern aufzuteilen.

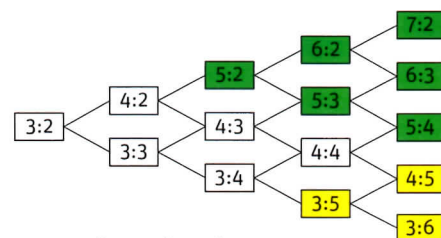
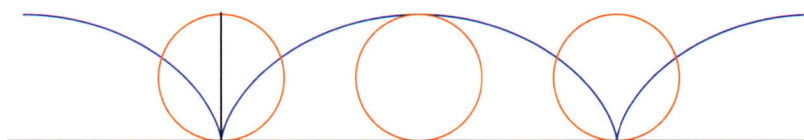
Pascal hat das »arithmetische« Dreieck, das wir heute »pascalsches Dreieck« nennen, zwar nicht als Erster entdeckt; er ist jedoch der Erste, der sich intensiv mit den Eigenschaften der Binomialkoeffizienten beschäftigt und Beweise führt; dabei bedient er sich des Verfahrens der vollständigen Induktion.

Nach einer mystischen Erfahrung im November 1656 zieht sich Pascal vorübergehend ins Kloster Port-Royal zurück und widmet sich philosophischen und theologischen Fragen. Er verfasst unter Pseudonym Streitschriften gegen die Jesuiten (»Lettres provinciales«), die sich trotz königlichen und kirchlichen Verbots sehr schnell verbreiten; Sprachwissenschaftler bezeichnen sie wegen der brillanten Formulierungen als den Beginn der modernen französischen Prosa. Eine Abhandlung über den christlichen Glauben (»Pensées sur la religion«) kann Pascal auf Grund seines sich rapide verschlechternden Gesundheitszustands nicht mehr vollenden. Einer der Gedanken ist die berühmte »pascalsche Wette«: Der Glaube an Gott ist nicht nur richtig, sondern auch vernünftig: Wenn Gott nicht existiert, dann verliert man nichts, wenn man dennoch an ihn glaubt; aber wenn Gott existiert, verliert man alles, wenn man nicht glaubt.

Sein letztes mathematisches Werk – entstanden in einer Nacht des Jahres 1658, in der er vor Schmerzen nicht schlafen kann – befasst sich mit Zykloiden, das sind Ortskurven von Punkten auf einem rollenden Rad. Diese lassen sich durch eine Parametergleichung beschreiben:

$$x(t) = rt - a \cdot \sin(t) \text{ und } y(t) = r - a \cdot \cos(t).$$

Es gelingt ihm nicht nur, die Bogenlänge und die Fläche unter den Graphen sowie deren Schwerpunkt zu berechnen, sondern auch das Volumen und die Oberfläche des Körpers zu bestimmen, der bei Rotation um die x-Achse entsteht.



Anwendung des
pascalschen Dreiecks zur Lösung
des *problème des partis*



Zykloide mit $a=r=1$

SEKI KOWA

(1642 – 24.10.1708)



Japan 1992



Das pascalsche Dreieck in
»Der kostbare Spiegel der vier
Elemente« von Zhu Shijie
1303, Liberia 2000

Die Geburt von Seki Kowa (auch Seki Takakazu genannt) fällt in eine dramatische Phase der japanischen Geschichte: In der Mitte des 16. Jahrhunderts befand sich das Land noch in einem Machtkampf rivalisierender Fürsten, die gewaltsam versuchten, die Oberherrschaft über das Land (*Shogunat*) zu erringen. Eine kriegsentscheidende Rolle spielten schließlich die von europäischen Händlern nach Japan importierten Schusswaffen. Von 1543 an hatten zunächst Kaufleute aus Portugal, später auch aus anderen Ländern den Handel aufgenommen. Ihnen folgten Missionare, die Hunderttausende zum Christentum bekehrten, darunter auch Jesuiten, welche die japanischen Wissenschaftler über den Stand der mathematischen Entwicklung in Europa informierten.

Die europäischen Kaufleute und Missionare versuchten, politischen Einfluss zu nehmen. Im Jahr 1598 gelang es dann Tokugawa Ieyasu, einem der militärischen Führer, alle Rivalen zu besiegen und so Japan gewaltsam zu einigen. Um einen möglichen Einfluss des Kaisers (*Tenno*) zu reduzieren, verlegte er den Regierungssitz von Kioto in sein bisheriges Hauptquartier, ein kleines Fischerdorf namens Edo, das später den Namen Tokio (wörtlich: Ost-Hauptstadt) erhielt. Er verwies die fremden Kaufleute und Missionare des Landes, verbot den christlichen Glauben und ließ die christlichen Kirchen zerstören.

Nur einige holländische Kaufleute, die jeden Missionierungsgedanken von sich wiesen, durften ihren Handel fortsetzen (Spektrum der Wissenschaft 11/1994, S. 90). Für sie wurde am Hafen von Nagasaki eine künstliche, ummauerte Insel geschaffen; nur einmal im Jahr durfte dort ein Handelsschiff anlegen. Über 200 Jahre lang war dies die einzige Verbindung Japans zur Außenwelt, denn die

Herrscher verboten auch einheimischen Schiffen, in fremde Länder auszufahren. In der langen Phase der Isolation, die erst 1854 gewaltsam durch amerikanische Kriegsschiffe gebrochen wurde, erlebte Japan kulturell eine Renaissance; Malerei und Gartenarchitektur entwickelten sich, die berühmte Teezeremonie entstand ebenso wie die besondere Art, Blumen zu arrangieren (Ikebana). Auch die Mathematik erlebte eine neue Blüte.

Seki Kowa gilt als der wichtigste Vertreter des *Wasan*, der japanischen Mathematik der Edo-Epoche. Auf seinem Grabstein wird er als »arithmetischer Weiser« bezeichnet. Er wird Ende des Jahres 1642 (wenige Monate vor Isaac Newton) als zweiter Sohn eines Samurais geboren; im Kindesalter wird er von einer adligen Familie adoptiert. Bereits in frühen Jahren erkennt man seine besondere mathematische Begabung; er unterstützt seinen Adoptivvater bei der Abrechnung und Überprüfung der Steuerabgaben des Bezirks. Da er ein besonderes Interesse an mathematischen Fragestellungen hat, richtet er sich eine eigene Bibliothek mit japanischen und chinesischen Mathematikbüchern ein und beschäftigt sich intensiv mit deren Inhalt.

Besonderen Einfluss auf Seki Kowa haben dabei zwei Bücher des chinesischen Mathematikers Zhu Shijie (1260–1330): »Einführung in das Studium der Mathematik« und »Der kostbare Spiegel der vier Elemente«. In diesen werden unter anderem nichtlineare Gleichungssysteme mit bis zu vier Variablen aufgestellt und numerisch gelöst. Zhu Shijie bezeichnet dies als »Methode der himmlischen Elemente«. Bei der Lösung von Gleichungen höheren Grades wird eine Methode angewandt, die mit dem – erst 500 Jahre später in Europa entwickelten – Horner-Verfahren (benannt nach William George Horner, 1786–1837) große Ähnlichkeit hat.

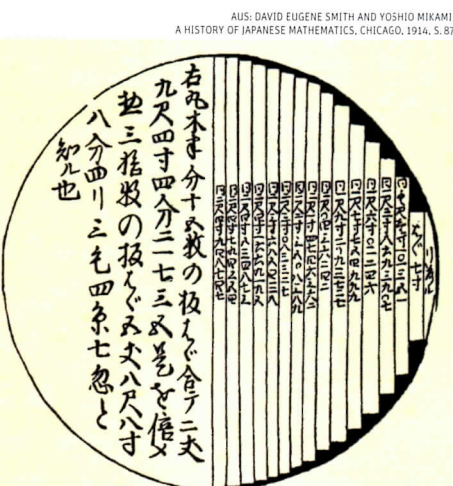


Fig. 27. Early steps in the calculus. From Sawaguchi Kazuyuki's *Aikoku Sampu-ki* (1670).

Ansätze zur Integralrechnung: Approximation einer Kreisfläche durch Rechtecksummen

Das Buch »Jinko-ki« (»Abhandlung über Zahlen«) von Mitsuyoshi (1598–1672) aus dem Jahr 1627 enthält unter anderem Ansätze zur Integralrechnung (Bild S. 42 unten). Zugleich begründet es eine neue Tradition: Der Autor stellt auch Aufgaben, für die er selbst keine Lösung angeben kann. Durch die Formulierung von ungelösten Problemen entsteht später ein Wettstreit zwischen Sekis Schule und den (Hoch-)Schulen in Kioto und Osaka.

Chinesische Mathematikbücher gelangen im 15. Jahrhundert nach Japan; die Bücher werden zunächst ohne Veränderungen nachgedruckt, dann mit Kommentaren versehen, später durch eigene Überlegungen der jeweiligen Herausgeber ergänzt. Diese Bücher enthalten Probleme aus verschiedenen Gebieten der Mathematik in Form von Aufgabensammlungen mit Lösungen; dabei erläutern die Autoren die Lösungsmethoden mit einer durchaus vielfältigen Auswahl an Themen, jedoch ohne einen »theoretischen Überbau« zu schaffen.

Auch erscheinen Bücher, die den Gebrauch des japanischen Abakus (*Soroban*) lehren.

Charakteristisch für die Zeit des *Wasan* sind auch die mathematischen Tafeln der »Tempelgeometrie« (*Sangaku*), auf denen geometrische Probleme mit ein- oder umschriebenen Kreisen, Ellipsen, Quadraten, Rauten und Dreiecken notiert werden; auch räumliche Probleme kommen vor (Spektrum der Wissenschaft 7/1998, S. 80). Diese kunstvoll erstellten Tafeln werden in buddhistischen Tempeln oder Schinto-Schreinen als Opfergaben aufgehängt, als Dank an die Götter für die Erleuchtung, dieses Problem entdeckt und gelöst zu haben; sie dienen den Besuchern als intellektuelle Herausforderung.

In einem 1670 in Osaka erscheinenden Buch zitiert Sawaguchi Kazuyuki 150 Probleme, an denen Mitsuyoshi scheiterte, und gibt Lösungen für 135 von ihnen an. Die übrigen bezeichnet er als »tatsächlich unlösbar«.

Eines von ihnen (Bild rechts unten) lautet: »In einen Kreis sind drei andere Kreise eingeschrieben; die übrig bleibende Fläche hat 120 Flächeneinheiten. Der gemeinsame Durchmesser der beiden kleinen Kreise ist um 5 Längeneinheiten kleiner als der Durchmesser des dritten Kreises. Welchen Durchmesser haben die Kreise in der Figur?«

Vier Jahre später bringt Seki Kowa in seinem Buch »Hatsubi Sampo« die Lösungen aller 15 Probleme und wird dadurch berühmt. Im selben Buch präsentiert er algebraische Terme in neuen, selbst erfundenen Schreibweisen für Potenzen. Wie seine europäischen Zeitgenossen versucht er die eigentlichen Lösungsmethoden oder gar die Wege zu ihrer Findung vor

den Konkurrenten verborgen zu halten. Wichtig ist nur, dass man ein Problem mit einer selbst entwickelten Methode lösen kann – nicht, warum diese Methode geeignet ist, das Problem zu lösen. So werden seine Lösungswege erst Jahrzehnte nach seinem Tod bekannt.

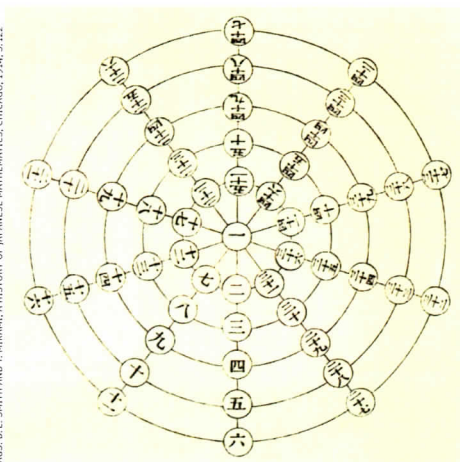
In der wissenschaftlichen Literatur wird Seki von seiner Bedeutung her oft mit Newton verglichen. Die von ihm, möglicherweise auch erst von seinem Schüler Katahiro Takebe entwickelten Methoden gehen weit über das hinaus, was man bei Zhu Shijie findet: Seine Bücher enthalten verallgemeinerte Schemata zur (numerischen) Lösung beliebiger algebraischer Gleichungen.

Um lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten zu lösen, verwendet er ein Verfahren, durch das man aus Tabellen mit den Koeffizienten der Gleichungen die Lösungen gewinnt – vergleichbar der Determinantenmethode, die Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zehn Jahre später entdeckt; Seki zeigt auch die für Determinanten geltenden Vertauschungsgesetze. Er gibt Formeln für die Summe der ersten k Potenzen der natürlichen Zahlen an, findet also die Bernoulli-Zahlen vor Jakob Bernoulli (1655–1705).

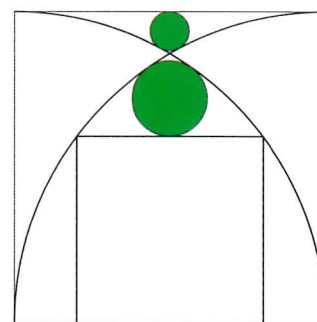
Seki und Takebe berechnen die Kreiszahl π nach der *Enri*-Methode (»Kreisprinzip«), ein eigenartiges, ungewöhnliches Verfahren: Betrachtet werden dabei infinitesimale Bogenstücke über Sehnen, die schrittweise mit zunehmender Genauigkeit berechnet werden – die Bestimmung von π auf zehn Stellen genau geschieht dabei durch Reihenentwicklung!

Schließlich findet man in den Büchern Sekis auch eine Fülle von Aufgaben zur Unterhaltungsmathematik, zum Beispiel Verfahren, wie magische Quadrate oder magische Zirkel erzeugt werden können.

Erst 1868 werden die *Wasan*-Bücher in Japan durch Bücher im westlichen Stil abgelöst – also mit dem seit Euklid üblichen Schema Definition – Satz – Beweis.



AUS: D. E. SMITH AND Y. MIKAMI, A HISTORY OF JAPANESE MATHEMATICS, CHICAGO, 1914, S. 122

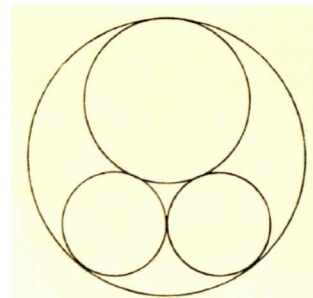


Beispiel eines Problems der Tempelgeometrie

12	11	10	45	46	49	2
47	20	19	35	37	14	3
44	34	24	29	22	16	6
7	17	23	25	27	33	43
8	18	28	21	26	32	42
9	36	31	15	13	30	41
48	39	40	5	4	1	38

NACH: DAVID EUGENE SMITH AND YOSHIO MIKAMI, A HISTORY OF JAPANESE MATHEMATICS, CHICAGO, 1914, S. 118

Ein magisches Quadrat, erzeugt nach Seki Kowas Verfahren



AUS: DAVID EUGENE SMITH AND YOSHIO MIKAMI, A HISTORY OF JAPANESE MATHEMATICS, CHICAGO, 1914, S. 96

Links ein magischer Zirkel: Die Summe der Zahlen entlang jedem Durchmesser und entlang jedem Kreisumfang ist stets dieselbe. Rechts das »unlösbare Problem«

ISAAC NEWTON

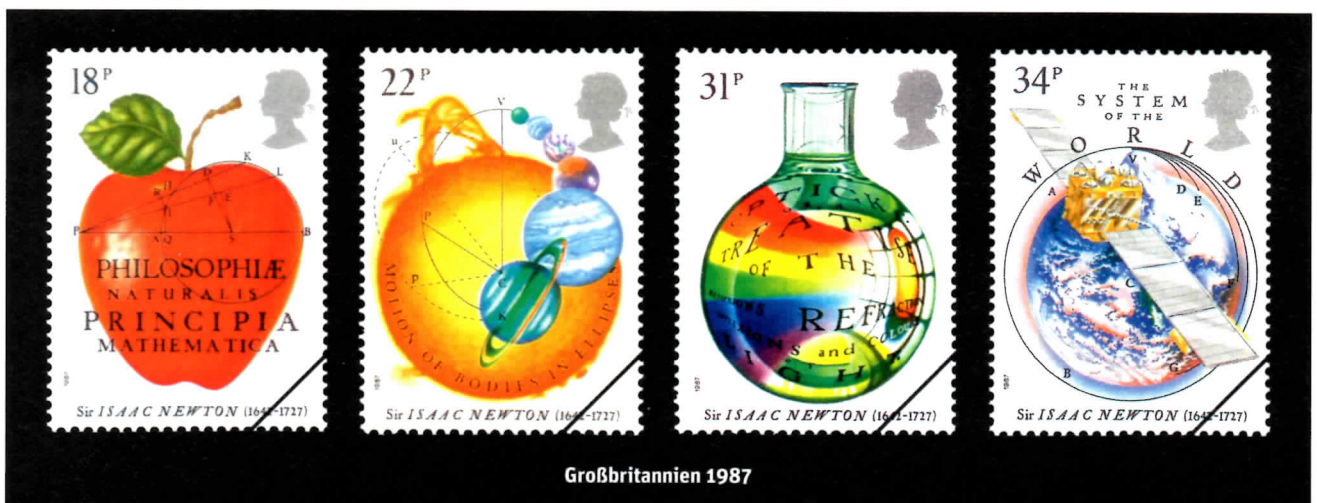
(4.1. 1643 – 31.3. 1727)



Isaac Newton wird am ersten Weihnachtstag des Jahres 1642 in Woolsthorpe, Lincolnshire, geboren – wenn man dem zu diesem Zeitpunkt in England noch geltenden julianischen Kalender folgt. Sein Vater, ein Landwirt, stirbt drei Monate vor der Geburt des Sohnes. Als die Mutter 1645 wieder heiratet, wird er der Großmutter zur Pflege übergeben, bis die erneut verwitwete Mutter 1653 mit drei weiteren Kindern zurückkehrt. Für ihn als ältesten Sohn der mittlerweile nicht unermögenden Witwe ist eigentlich vorgesehen, dass er einmal die Verwaltung des Landbesitzes übernehmen soll, aber Isaac zeigt keinerlei Begabung oder Interesse an diesen Dingen.

Ein Onkel bewirkt, dass er die Free Grammar School in einem Nachbarort besuchen und 1661 nach einer Unterbrechung des Schulbesuchs (er wird in einem Zeugnis als träge und unaufmerksam bezeichnet) sogar an das Trinity College in Cambridge wechseln darf. Neben der Philosophie des Aristoteles, die im Zentrum des Studiums steht, lernt

Newton auch die philosophischen Schriften von René Descartes (S. 34) sowie physikalische Abhandlungen von Johannes Kepler (1571–1630) und Galileo Galilei (1564–1642) kennen. Im Herbst 1663 gerät er an ein astrologisches Buch sowie eines über Trigonometrie und bemerkt in beiden Fällen, dass ihm tiefer gehende geometrische Kenntnisse zum Verständnis fehlen. Daraufhin beschließt er, sich mit den »Elementen« des Euklid zu beschäftigen. Es folgt das Selbststudium von Descartes' »La Géométrie«, der »neuen Algebra« von François Viète (1540–1603) aus dem Jahr 1646 und der algebraischen Schriften von John Wallis (1616–1703), in denen dieser die Bestimmung der Fläche unter Parabeln und Hyperbeln beschreibt. Sein wesentliches Hilfsmittel sind die Indivisiblen von Bonaventura Cavalieri (1598–1647), das sind unendlich dünne Gebilde »kleiner als jeder beliebig angebbare positive Wert«. Auf seinem Exemplar der wallisschen Schrift vermerkt Newton: »So macht Wallis es, aber ich mache es so ...«



Den größten Einfluss auf den Studenten Newton hat jedoch Isaac Barrow (1630–1677), der 1663 eine neu eingerichtete Professur am Trinity College in Cambridge übernimmt. Dessen »Lectiones mathematicae« und »Lectiones geometricae« verbinden die Grundlagen der Mathematik der Antike mit den aktuellen Erkenntnissen über die Bestimmung des Inhalts krummlinig begrenzter Flächen und über das Tangentenproblem.

Im Frühsommer 1665 – Newton hat gerade den Grad eines Bachelor erworben – wird der gesamte Lehrbetrieb der Universität wegen einer nahenden Pestepidemie eingestellt, und Newton kehrt in die Einsamkeit von Woolsthorpe zurück. In den folgenden beiden Jahren konzipiert er die Grundideen der großen Theorien, die man auch heute noch mit seinem Namen verbindet: Differenzial- und Integralrechnung, Gravitationstheorie und Optik.

Nach Ende der Pestgefahr kehrt er nach Cambridge zurück, wird schnell zum »Fellow« und zum »Master« ernannt und 1669, als Barrow Hofprediger des englischen Königs wird, zu dessen Nachfolger auf dem Lehrstuhl berufen. Barrow macht seinen Einfluss geltend, um Newtons neue Theorien in der wissenschaftlichen Welt zu verbreiten, aber dieser zieht das Manuskript der Schrift »De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas« (»Über die Rechenkunst mittels an Zahl der Glieder unendlichen Gleichungen«) schnell wieder zurück.

In dieser Schrift stellt Newton unter anderem dar, wie man die Koeffizienten in binomischen Formeln direkt berechnen kann (also nicht nur zeilenweise nach dem Schema, das wir pascalsches Dreieck nennen). Die allgemeine Binomialreihe lässt sich (in der heutigen Schreibweise) wie folgt notieren:

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + n \cdot x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} \cdot x^3 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot x^4 + \dots\end{aligned}$$

So ist zum Beispiel

$$\begin{aligned}(1+x)^3 &= 1 + 3x + \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot x^2 \\ &+ \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2} \cdot x^3 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot x^4 + \dots \\ &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3\end{aligned}$$

Diese Reihenentwicklung ist auch für negative und gebrochene Exponenten möglich:

$$\begin{aligned}(1+x)^{-3} &= 1 - 3x + \frac{(-3) \cdot (-4)}{2} \cdot x^2 \\ &+ \frac{(-3) \cdot (-4) \cdot (-5)}{3 \cdot 2} \cdot x^3 \\ &+ \frac{(-3) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-6)}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot x^4 + \dots \\ &= 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \dots\end{aligned}$$

Newtons »Beweis« für die Richtigkeit erfolgt durch Ausmultiplizieren: In dem Produkt

$(1+x)^3 \cdot (1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-\dots)$ heben sich alle Potenzen gegenseitig auf, und es bleibt nur noch eine Eins stehen. Analog geht er bei Wurzelfunktionen vor:

$$\begin{aligned}(1-x)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}(-x)^2 \\ &+ \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2 \cdot 3}(-x)^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \dots\end{aligned}$$

Hier erfolgt sein Nachweis für die Richtigkeit der Reihenentwicklung durch Quadrieren des unendlichen Terms. Das Wurzelziehen wird nach dieser Methode erheblich vereinfacht. Um beispielsweise einen Näherungswert für $\sqrt{3}$ zu berechnen, kann man wie folgt vorgehen:

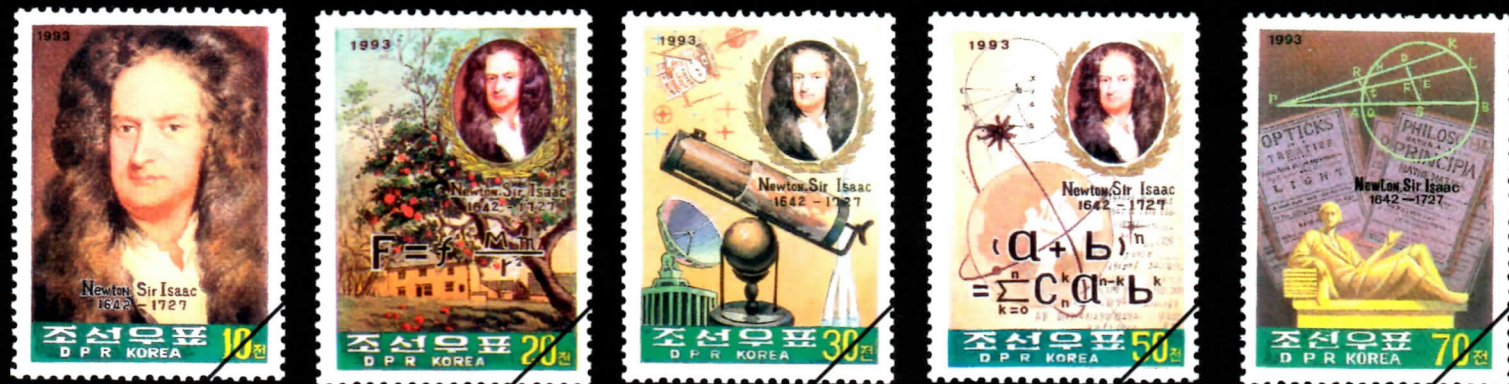
$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \sqrt{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &\approx 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16}\right) \approx 1,734\end{aligned}$$

Newton verwendet diese von ihm geschaffene neue Technik der Reihenentwicklung auch, um Flächen unter Kurven zu bestimmen. In seiner Schrift findet sich eine Regel, in der wir eine Standardformel für das Integrieren wiedererkennen:

$$\begin{aligned}\text{If } ax^{\frac{m}{n}} = y \text{ it shall be } &\frac{an}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}} \\ &= \text{Area.}\end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe berechnet er unter anderem auch den Flächeninhalt eines Kreissegments und bestimmt so die Kreiszahl π mit 15-stelliger Genauigkeit.

Die von Newton entwickelte Infinitesimalrechnung (*method of fluxions* und *inverse method of fluxions*) orientiert sich sehr stark an physikalischen Vorstellungen: Eine Kurve fasst er als kontinuierliche Bewegung eines Punktes auf; die zeitabhängigen Variablen bezeichnet er als »Fluents« (fließende Größen), die



Nordkorea 1993

Wilhelm von Oranien und Mary,
Niederlande 1988Huygens und Newton,
Niederlande 1988

Änderungsgeschwindigkeit einer Größe y als deren Fluxion $\dot{y}$. Für das unendlich kleine Zeitintervall verwendet er den Buchstaben o , die unendlich kleine Zunahme der Fluente x in dem unendlich kleinen Zeitintervall o (also die momentane Geschwindigkeit in einer unendlich kleinen Zeit) notiert er als $\dot{x}o$. Um die Steigung einer Tangente an eine Kurve zu berechnen, muss nur das Verhältnis $\dot{y}/\dot{x}$ bestimmt werden; hierbei wird die Kürzungsregel »Ersetze $x + \dot{x}o$ durch x « angewandt. Er erkennt allgemein, dass die Fluxion der unter einer Kurve eingeschlossenen Fläche gleich der Kurve selbst ist – und das ist nichts anderes als der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Newton entdeckt ihn im Jahr 1665, veröffentlicht seine Erkenntnisse aber erst 1704.

Seine ersten Vorlesungen als Professor in Cambridge widmet Newton jedoch nicht der Analysis, sondern der Optik. Abweichend von der Lehre des Aristoteles vertritt er die Ansicht, dass sich das weiße Licht aus verschiedenen Farben zusammensetzt. Aus der Tatsache, dass ein Prisma das Licht je nach Farbe unterschiedlich stark bricht, schließt er, dass jede Linse einen entsprechenden Abbildungsfehler hat (den wir heute »chromatische Aberration« nennen), und konstruiert daraufhin ein Spiegelteleskop. Diese geniale Erfindung führt zu seiner Aufnahme als »Fellow« in die Royal Society, jedoch erfährt er durch Robert Hooke (1635–1701) und Christiaan Huygens (1629–1695) heftigen Widerspruch wegen der von ihm vertretenen Korpuskulartheorie. Newton reagiert auf diese Kritik in irrationaler Weise: Er zieht sich zurück und will nichts mehr veröffentlichen. Seine »Opticks«

beispielsweise erscheinen erst ein Jahr nach Hookes Tod.

Erst Edmond Halley (1656–1742) schafft es, Newton aus seiner Lethargie herauszuholen, und drängt ihn, das neue physikalische Weltbild endlich in Buchform darzulegen. Die »Philosophiae naturalis principia mathematica« erscheinen 1687. In ihnen findet sich das Gravitationsgesetz: »*All matter attracts all other matter with a force proportional to the product of their masses and inversely proportional to the square of the distance between them.*«

Es gelingt ihm zu zeigen, dass aus dem Gravitationsgesetz die keplerschen Gesetze der Planetenbewegung folgen und umgekehrt. Mit den drei grundlegenden Prinzipien der klassischen Mechanik, die heute als newtonsche Axiome bezeichnet werden, schafft er ein einheitliches physikalisches Weltbild, das erst im 20. Jahrhundert durch Einsteins Relativitätstheorie ergänzt werden muss:

- Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch eine Kraft gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern (Trägheitsprinzip).
- Die auf einen Körper wirkende Kraft ist gleich dem Produkt aus seiner Masse und seiner Beschleunigung (Aktionsprinzip).
- Zu jeder Kraft gehört eine gleich große, entgegengerichtete Kraft (Wechselwirkungsprinzip).

Das Erscheinungsjahr der »Principia« fällt in das Ende einer unruhigen Phase der Geschichte Englands: Bürgerkrieg und Hinrichtung des Königs Karl I. (1649), Diktatur unter



Oliver Cromwell, Rückkehr zur Monarchie (1658). Jakob II., Sohn des hingerichteten Königs, wird neuer Herrscher, stärkt jedoch die Machtpositionen der katholischen Kirche und erregt damit den Widerstand der protestantischen Gruppen, die schließlich Wilhelm von Oranien, dem Erbstatthalter der Niederlande, den englischen Königsthron anbieten. Nach der »Glorious Revolution« im Jahr 1688 wird die Position des Parlaments gestärkt (»Bill of Rights«). Der überzeugte Protestant Newton wird als Vertreter der Universität Cambridge in das neue Parlament gewählt.

Nach einem Zusammenbruch zieht sich der immer wieder unter Depressionen leidende Newton aus der Forschung zurück, nimmt das Amt des Leiters der königlichen Münze in London an und kümmert sich um die Reform des englischen Münzwesens. 1703 wird er zum Präsidenten der Royal Society ge-

wählt und in den Adelsstand erhoben; bis zu seinem Tod wird er jedes Jahr durch Wiederwahl in seinem Amt bestätigt. Mit einem Staatsbegräbnis wird er in der Westminster Abbey beigesetzt.

Seine letzten Jahre werden durch den Streit um die Frage, wer der »Erfinder« der Infinitesimalrechnung ist, überschattet. Dank der geschickt gewählten Schreibweise und der früheren Veröffentlichung im Jahr 1684 erfährt die von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) gefundene Methode die größere Anerkennung unter den Mathematikern des Kontinents. Der Prioritätenstreit entwickelt sich so zu einem Problem der nationalen Ehre, den eine parteiisch besetzte Kommission der Royal Society unter Leitung von Halley zu Gunsten von Newton »entscheidet«. Heute weiß man, dass beide ihre Theorien unabhängig voneinander entwickelt haben.



Newton und Halley,
Zentralafrikanische Republik 1985



Monaco 1987

Sowjetunion 1987

GOTTFRIED W. LEIBNIZ

(1.7. 1646 – 14.11. 1716)



Gottfried Wilhelm Leibniz, Sohn eines früh verstorbenen Universitätsprofessors für Recht und Moralphilosophie in Leipzig, nutzt bereits als Achtjähriger die väterliche Bibliothek, um sich selbst die lateinische Sprache beizubringen. Mit 15 Jahren beginnt er ein Jurastudium an der Universität, das er im Alter von 20 Jahren mit der Promotion abschließt – allerdings nicht in Leipzig, sondern in Nürnberg, weil ihn die Professoren in Leipzig für zu jung halten. Danach tritt er als juristischer Berater in den Dienst des Kurfürsten von Mainz.

Bei seinen Reisen als Diplomat nach Frankreich und England lernt er die bedeutendsten zeitgenössischen Naturwissenschaftler und Mathematiker kennen; mit Christiaan Huygens (1629–1694) freundet er sich an. In kurzer Folge erscheinen erste Veröffentlichungen über mathematische Themen, 1673 wird er in die Royal Society aufgenommen. Er bemüht sich vergeblich um eine feste Anstellung an der Pariser Akademie der Wissenschaften, obwohl er im Rahmen seiner Bewerbung eine von ihm erfundene Rechenmaschine vorführt, mit der man sogar multiplizieren und dividieren kann.

Daher tritt er 1676 als Bibliothekar und Jurist in den Dienst des Herzogs von Hannover. Zu seinen Hauptaufgaben gehört es, die Geschichte des Welfenhauses zu erforschen, um damit dessen Ansprüche auf den englischen Thron zu legitimieren. Als dann 1714 der Herzog von Hannover tatsächlich englischer König wird und der gesamte Hof nach London zieht, lässt man ihn in Hannover zurück, damit er die Geschichte der Welfen weiterschreiben könne ...

Leibniz nutzt seine Tätigkeit im Dienst des Hauses Hannover zu langen Reisen durch Europa; außerdem korrespondiert er mit zahl-

reichen Wissenschaftlern. Im Leibniz-Archiv sind über 15 000 Briefe dokumentiert, die er selbst an über 1000 Brieffpartner geschrieben hat, und mehr als 20 000 Briefe, die an ihn gerichtet waren.

Es gibt kaum ein Thema, das ihn nicht interessiert; er sagt von sich selbst: »Beim Erwachen hatte ich schon so viele Einfälle, dass der Tag nicht ausreichte, um sie niederzuschreiben.« So beschäftigt er sich mit der Entwässerung der Gruben im Harzbergbau und entwickelt Ideen zum Bau eines Unterseeboots sowie zur Verbesserung der Sicherheit bei Türschlössern. Er schlägt eine Witwen- und Waisenrente vor und gibt medizinische Ratschläge.

Leibniz bemüht sich um eine Aussöhnung zwischen dem katholischen und dem protestantischen Lager, erarbeitet Pläne für eine Münzreform, um das Handelswesen zu vereinfachen. Nicht zuletzt regt er die Einrichtung von wissenschaftlichen Akademien nach französischem und englischen Vorbild in verschiedenen europäischen Staaten an: Preußen, Sachsen, Russland und Habsburg. Vor allem aber veröffentlicht er zahlreiche Schriften zu mathematischen, physikalischen und philosophischen Themen. Trotz der großen Beachtung, die er in der wissenschaftlichen Welt erfährt, mangelt es ihm an Selbstvertrauen. Vielleicht ist dies körperlich bedingt, vielleicht liegt es aber auch an seinem starken sächsischen Akzent.

Auch würdigen die Herzöge von Hannover die wissenschaftlichen Leistungen des Universalgenies Leibniz überhaupt nicht. Am Ende seines Lebens setzt ihm vor allem der Prioritätenstreit um die Infinitesimalrechnung gesundheitlich zu: Isaac Newton (1643–1727) hat 1666 damit begonnen, seine »Fluxionsrechnung« (Differenzialrechnung) zu entwickeln, die ersten Veröffentlichungen erfolgen

jedoch erst 1687 (siehe S. 44). Leibniz seinerseits publiziert seinen »Calculus« unabhängig von Newton im Jahr 1684 in dem Aufsatz »Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus«; die Schrift enthält bereits alle Ableitungsregeln einschließlich der Kettenregel sowie die Bedingungen für Extremwerte und Wendepunkte.

Zwei Jahre später folgt »De geometria recondita«, in der er das Integralzeichen $\int$ verwendet. Sehr schnell setzen sich in Europa die von ihm gewählten Schreibweisen und Begriffe (wie Konstante, Variable, Funktion) durch; seine Anhänger, vor allem Johann und Jakob Bernoulli, stellen durch ihre Beiträge zur Analysis und zu physikalischen Anwendungen die Leistungstärke der leibnizschen Notationen unter Beweis.

Bereits 1677 hat Newton seinem Konkurrenten Leibniz unterstellt, dass dieser seine Methoden »gestohlen« habe; der Streit eskaliert über die Jahre und spaltet die wissenschaftliche Welt. 1713 »bestätigt« eine parteiisch besetzte Kommission der Royal Society die Plagiatsvorwürfe. Heute geht man jedoch davon aus, dass beide ihre Theorien unabhängig voneinander entwickelt haben.

Die Fähigkeit von Leibniz, geeignete Symbole zur Behandlung wissenschaftlicher Fragen zu wählen, zeigt sich auch bei seinen umfangreichen Untersuchungen zur formalen Logik; er entdeckt die Bedeutung des Dualsystems, auf dem die modernen Computer basieren, verbindet es aber auch mit seinem theologisch-philosophischen Weltbild: Im Bekenntnis »Ohne Gott ist nichts« setzt er für Gott die Eins und für das Nichts die Null. Sein berühmter und viel verspotteter Satz von der Welt als »der besten aller möglichen Welten« ist kein Zeichen von religiöser Naivität, sondern belegt seine Überzeugung, dass diese Welt so viel Entwicklungspotenzial enthält, dass der derzeitige Zustand immer weiter verbessert werden kann.

In Mathematikbüchern findet man den Namen von Leibniz in zahlreichen Zusammenhängen:

► Die leibnizsche Produktregel gibt an, wie höhere Ableitungen eines Produkts von Funktionen gebildet werden:

$$\begin{aligned} & (f \cdot g)^{(n)} \\ &= \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} \\ &+ \binom{n}{2} f^{(n-2)} g^{(2)} + \dots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)} \end{aligned}$$

► Das Leibniz-Kriterium macht eine Aussage über Reihen mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern (alternierende Reihen): Streben diese Glieder gegen null, dann ist die Reihe konvergent.

Bereits 1674 benutzt Leibniz die Potenzreihenentwicklung der Arkustangensfunktion, um die (heute so bezeichnete) Leibniz-Reihe für π herzuleiten:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Für viele Regeln, die Leibniz entdeckt, liefert er keine Beweise. Manche Schlussweisen erscheinen aus heutiger Sicht leichtfertig; sie zeigen jedoch sein ungeheures Gespür für richtige Zusammenhänge. Beispielsweise erhält man aus der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \dots$$

durch Integration

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \dots;$$

diese Gleichung gilt für $|x| < 1$. Setzt man einfach einmal den Wert 1 für die Variable x ein, dann erhält man tatsächlich den richtigen Grenzwert $\ln(2) \approx 0,693$, was eigentlich erstaunlich ist. Auch die Bestimmung des Grenzwerts für die Reihe der reziproken Dreieckszahlen, mit der Leibniz 1672 zum ersten Mal auf sich aufmerksam macht, enthält eine nicht zulässige Schlussweise: Er argumentiert

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots = 2,$$

denn

$$\begin{aligned} & (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots) - 1 \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots) \\ &= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{12}) \\ &+ (\frac{1}{5} + \frac{1}{20}) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots \end{aligned}$$

Jetzt subtrahiert Leibniz auf beiden Seiten der Gleichung die Summe $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$. Aber das ist verboten, denn die Summe ist unendlich, und die Differenz unendlicher Größen ist unbestimmt. In diesem Fall ist das Ergebnis korrekt. Erst über 100 Jahre später stellen Mathematiker wie Augustin Cauchy (S. 74) die Grundlagen der Analysis auf ein strenges, exaktes Fundament.



Albanien 1996



Rumänien 1996



DDR 1950



Deutschland 1926

LEONHARD EULER

(15.4.1707 – 18.9.1783)



Albrecht Dürers »Melencolia«, Mongolei 1978

Leonhard Euler war zweifelsohne der produktivste Mathematiker aller Zeiten; er verfasste Bücher und umfangreiche Arbeiten zu vielen Teilbereichen der reinen und angewandten Mathematik, der Physik, zur Astronomie, Geodäsie, Kartografie, Musik und zum Schiffsbau – in lateinischer, französischer, russischer und deutscher Sprache. Er schrieb nicht nur viel, sondern brachte bei allen Themen, mit denen er sich beschäftigte, mit unglaublicher Kreativität neuartige Ideen ein und eröffnete durch seine Beiträge sogar neue Teilbereiche der Mathematik. Auf der Schweizer Briefmarke von 2007 ist neben dem Polyeder aus Albrecht Dürers »Melencolia« und der Polyederformel ein Porträt Eulers aus dem Jahr 1753 abgedruckt, auf dem erkennbar ist, dass er schon früh mit einem Augenleiden zu kämpfen hatte.

Euler wird in Basel als Sohn eines Pfarrers geboren; auch seine Mutter stammt aus einer

Pfarrersfamilie. Da die Schule, die er besucht, den Jungen nicht angemessen fördern kann, unterrichtet ihn sein Vater selbst. Mit 14 Jahren besucht Euler philosophische Vorlesungen an der Universität und schließt das Studium mit einem Vergleich der Ideen von Descartes und Newton ab; mit 16 Jahren nimmt er, dem Wunsch seines Vaters entsprechend, ein Theologiestudium auf, wechselt dann aber zur Mathematik, nachdem Johann Bernoulli, ein Freund des Vaters, diesen davon überzeugt hat, dass Leonhard eine außergewöhnliche mathematische Begabung besitzt.

Mit 19 Jahren gewinnt er den zweiten Preis in einem Wettbewerb der Französischen Akademie der Wissenschaften mit einem Beitrag zur Frage, wie man Masten auf Segelschiffen optimal positioniert (der erste Preis wird übrigens Pierre Bouguer zugesprochen, Teilnehmer der Südamerika-Expedition, siehe S. 52). Man kann davon ausgehen, dass Euler bis da-



Akademie der Wissenschaften, Sowjetunion 1974



Sowjetunion 1983

hin noch keine Ozeanschiffe gesehen hatte! Diesen angesehenen, jährlich ausgeschriebenen wissenschaftlichen Wettbewerb gewinnt er später insgesamt zwölfmal.

Vergeblich bemüht sich Euler um eine freigewordene Physikprofessur in Basel, folgt dann 1727 Daniel und Jakob Bernoulli nach St. Petersburg an die drei Jahre zuvor von Peter dem Großen gegründete Russische Akademie der Wissenschaften. Hier soll er an der medizinischen Fakultät Vorlesungen über Anatomie und Physiologie halten, übernimmt jedoch bereits 1730 eine Professur für Physik, 1733 für Mathematik als Nachfolger von Daniel Bernoulli.

1734 heiratet er Katharina Gsell, Tochter eines aus der Schweiz stammenden Malers der Petersburger Akademie; in der glücklichen Ehe werden 13 Kinder geboren, von denen allerdings nur fünf die Kindheit überleben.

Innenpolitische Probleme in Russland veranlassen ihn 1741, von St. Petersburg als Direktor der mathematischen Klasse der Preußischen Akademie der Wissenschaften nach Berlin zu wechseln.

Erster Präsident der Akademie wird Pierre Louis Moreau de Maupertuis (S. 52), den er in seiner Arbeit intensiv unterstützt. In den 25 Jahren in Berlin verfasst er nicht nur 380 wissenschaftliche Arbeiten, sondern kümmert sich auch um das Observatorium ebenso wie um die Botanischen Gärten und die Wasserversorgung der Gärten des Schlosses Sanssouci, der Sommerresidenz König Friedrichs des Großen in Potsdam.

Mit seinen »Lettres à une princesse d'Allemagne sur quelques sujets de Physique et Philosophie« (»Briefe an eine deutsche Prinzessin über einige Themen aus Physik und Philosophie«) schreibt er Texte für die Allgemeinheit, ähnlich auch seine »Vollständige Anleitung zur Algebra« (1770), deren Texte er einem Schneider zur Kontrolle der Verständlichkeit vorlegt. Durch die von ihm entwickelten Methoden zur Lösung von Differenzialgleichungen (Gleichungen, in denen die unbekannte Funktion und deren Ableitungen auftreten) gibt er der Physik neue Impulse.

Über 25 Jahre hinweg hält er Kontakte nach St. Petersburg aufrecht, korrespondiert intensiv mit seinem Freund Christian Goldbach (1690–1764), dem er viele, aber nicht alle Fragen beantworten kann: Bis heute unbewiesen ist die goldbachsche Vermutung von 1742: »Jede gerade Zahl größer als 2 kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden« (siehe auch Spektrum der Wissenschaft 12/2008, S. 94).

1766 kehrt er wieder nach St. Petersburg zurück; in Berlin übernimmt Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) seine Stelle.

Obwohl er wenig später vollständig erblindet, verfasst er dort noch über 400 weitere Werke, die er seinem Sohn und seinem Schwiegersohn diktiert. Als er 1783 stirbt, umfasst sein Gesamtwerk insgesamt 866 Schriften (einsehbar unter <http://math.dartmouth.edu/~euler/>). Pierre Simon Laplace (1749–1827) kommentiert diese Werkfülle mit den Worten: »Lest Euler, lest Euler, er ist unser aller Meister.«

Mit seinen Lehrbüchern zur Analysis des Unendlichen (»Introductio in analysin infinitorum«), zur Differenzialrechnung (»Institutiones calculi differentialis«) und Integralrechnung (»Institutiones calculi integralis«) trägt Euler wesentlich zur Systematisierung der Analysis bei. Zahlreiche Begriffe und Schreibweisen der Mathematik werden von ihm eingeführt, darunter der Begriff der Funktion, die heute übliche Bezeichnung der trigonometrischen Funktionen, die Schreibweise $f(x)$, das Summenzeichen Σ und i für die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen. Von Euler stammt auch die Bezeichnung e für die Basis des natürlichen Logarithmus. Die Zahl wird heute als eulersche Zahl bezeichnet, obwohl sie lange vor Euler von John Napier (1550–1617) entdeckt worden war.

1734 verblüfft Euler die Fachwelt mit einer sensationellen Entdeckung: Dass die harmonische Reihe

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

divergiert, war bereits auf verschiedene Arten bewiesen worden; man vermutete, dass die entsprechende unendliche Reihe der reziproken Quadratzahlen konvergierte; Johann Bernoulli konnte für die Reihe

$$\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

sogar eine konvergente Majorante angeben, die den Grenzwert 2 hat; er scheiterte jedoch bei der Bestimmung eines Grenzwerts ebenso wie vor ihm Leibniz, Stirling, de Moivre und andere.

Euler geht mit den Potenzreihenentwicklungen von Funktionen äußerst virtuos um. Die Sinusfunktion lässt sich als Potenzreihe schreiben:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots;$$

hieraus erhält er die Darstellung



$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Diese Funktion hat an der Stelle $x = 0$ den Wert 1, und die Nullstellen liegen bei $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ...; der Funktionsterm lässt sich also auch als unendliches Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x)}{x} \\ &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \cdot \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \dots \end{aligned}$$

Multipliziert man nun das unendliche Produkt von Linearfaktoren aus und vergleicht die auftretenden Koeffizienten von x^2 , dann folgt

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} \dots,$$

also

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \\ = \frac{\pi^2}{6} = 1,644\,934\,066\,8\dots \end{aligned}$$

Betrachtet man nur die geraden Potenzen dieser unendlichen Summe, so erkennt man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \dots \\ = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\right) \\ = \frac{\pi^2}{24} = 0,411\,233\,516\,7\dots \end{aligned}$$

Für die ungeraden Potenzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \\ = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8} = 1,233\,700\,550\dots \end{aligned}$$

Außerdem erhält man:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right) \cdot \dots \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{35}{36} \cdot \dots \\ &= \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}, \end{aligned}$$

ein Ergebnis, das John Wallis (1616–1703) im Jahr 1650 auf völlig andere Weise hergeleitet hatte. Im 17. Jahrhundert war es übrigens



noch üblich, mit unendlichen Folgen und deren Grenzwerten intuitiv zu rechnen, ohne exakte Konvergenzbeweise zu führen.

Mit dem gleichen Ansatz des Koeffizientenvergleichs leitet Euler her, dass die Summe der reziproken vierten Potenzen der natürlichen Zahlen gegen $1/90 \cdot \pi^4$ konvergiert und die der 6. Potenzen gegen $1/945 \cdot \pi^6$. Er setzt seine Herleitungen bis zur 26. Potenz fort ... Bis heute ist übrigens noch keine Methode gefunden worden, um die Grenzwerte für reziproke Potenzen mit ungeradem Exponenten exakt zu bestimmen (Spektrum der Wissenschaft Spezial 2/2005 »Unendlich (plus eins)«, S. 19).

Euler verallgemeinert das Problem der unendlichen Summen von reziproken Potenzen, indem er für beliebige Exponenten die Zeta-Funktion einführt:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

und eine erstaunliche Produktdarstellung hierfür herleitet:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \cdot \dots,$$

in der nur Primzahlpotenzen auftreten (Spektrum der Wissenschaft 9/2008, S. 86).

Er entdeckt, dass die Folge der Summen der Stammbrüche (die harmonische Reihe) zwar divergiert, dies jedoch besonders langsam geschieht, und dass man diese Reihe mit den Werten der natürlichen Logarithmusfunktion vergleichen kann. Die Folge

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)$$

konvergiert gegen $\gamma = 0,577\,215\,664\dots$ Euler berechnet 1781 diesen Grenzwert auf 16 Stellen genau, Lorenzo Mascheroni (1750–1800) auf 32 Stellen. Die Zahl γ heißt heute Euler-Mascheroni-Konstante.

Zeitgleich zu Jean d'Alembert (1717–1783) entwickelt er das formale Rechnen mit komplexen Zahlen und untersucht Funktio-



nen mit komplexen Variablen; komplexe Zahlen haben jedoch für ihn keine reale Bedeutung. 1743 entdeckt er bei der Betrachtung der Potenzreihen für komplexe Argumente den einfachen Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} \cos(z) + i \cdot \sin(z) &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) \\ &\quad + i \cdot \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots \\ &= e^{iz} \end{aligned}$$

(Eulersche Formel). Für $z = \pi$ erhält man die bemerkenswerte Beziehung $e^{i\pi} + 1 = 0$, für $z = \pi/2$ ergibt sich $i = e^{i \cdot \pi/2}$, woraus

$$i^i = (e^{i \cdot \frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

folgt.

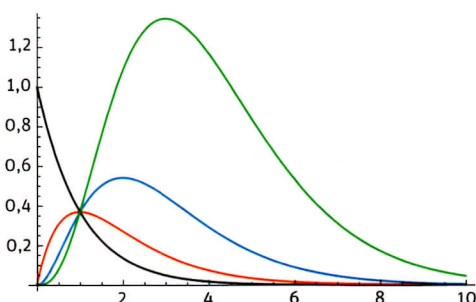
Wegen der Gesetzmäßigkeiten

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^0 e^{-x} dx &= 1, \\ \int_0^{\infty} x^1 e^{-x} dx &= 1, \\ \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx &= 2, \\ \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx &= 6, \dots \end{aligned}$$

hat Euler die Idee, mittels der Definition

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$$

(der so genannten Gammafunktion) die Fa-



Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^n e^{-x}$ für $n=0$ (schwarz), 1 (rot), 2 (blau), 3 (grün)

kultäten zu interpolieren und die Definition auf beliebige $z \in \mathbb{R}$ zu erweitern; allgemein gilt nämlich: $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ und $\Gamma(1)=1$, also für $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma(n+1) = n!$

In der Zahlentheorie liefert Euler gleich drei verschiedene Beweise für den kleinen fermatschen Satz, den Pierre de Fermat 1634 formulierte, aber nicht beweisen konnte (siehe S. 36). Die Vermutung Fermats, dass alle Zahlen der Form $2^{2^n} + 1$ Primzahlen sind, widerlegt er, indem er $2^{32} + 1 = 4294967297$ in das Produkt $641 \cdot 6700417$ zerlegt.

Auf der Suche nach dieser Faktorisierung kann er den kleinen fermatschen Satz und einen Satz über die eindeutige Darstellbarkeit von Zahlen des Typs $4k+1$ verwenden: Alle natürlichen Zahlen, die bei der Division durch 4 den Rest 1 lassen, lassen sich eindeutig (nur auf eine Weise) als Summe zweier Quadratzahlen schreiben (und umgekehrt). Auch dieser Satz ist von Fermat gefunden worden, erst Euler gelingt der Beweis. Die fermatsche Vermutung, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ keine Lösungen in der Menge der ganzen Zahlen hat, beweist Euler für den Fall $n = 3$.

Im Zusammenhang mit seinem dritten Beweis des kleinen fermatschen Satzes definiert er 1763 die Funktion $\varphi(n)$, die ihm zu Ehren als eulersche Funktion bezeichnet wird. Diese ordnet jeder natürlichen Zahl n die Anzahl der zu n teilerfremden natürlichen Zahlen k mit $k \leq n$ zu. Es gilt $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, falls a und b zueinander teilerfremd sind. Bemerkenswert ist, dass sich diese Funktion in Produktform mit Hilfe der Kehrwerte der Primteiler von n schreiben lässt, das Produkt aber stets ganzzahlig ist:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

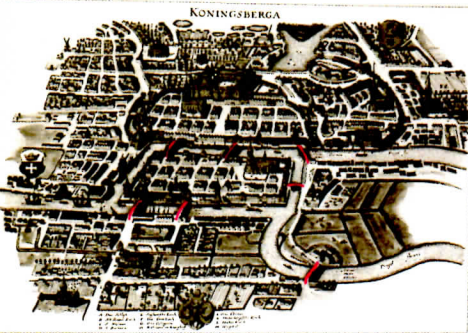
Beispiel: 10 ist teilerfremd zu 1, 3, 7, 9, und es gilt:

$$\varphi(10) = 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 4$$

Griechische und arabische Mathematiker waren fasziniert von den so genannten befreundeten Zahlen 220 und 284, für die gilt, dass die Summe der echten Teiler jeweils die Partnerzahl ergibt:

$$\begin{aligned} 220 &= 1 + 2 + 4 + 71 + 142 \quad \text{und} \\ 284 &= 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 \\ &\quad + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 \end{aligned}$$

Erst um 1300 entdeckt der arabische Mathematiker Ibn al Banna (1256–1321), dass auch die Zahlen 17296 und 18416 diese bemerkenswerte Eigenschaft besitzen. Descartes



Die Brücken von Königsberg (rot)

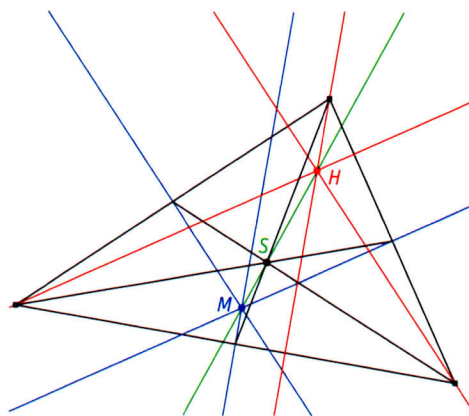
findet im Jahr 1638 noch ein weiteres Paar: 9363584 und 9437056. Zwischen 1747 und 1750 entdeckt Euler weitere 58 Zahlenpaare mit dieser Eigenschaft, weil es ihm gelingt, deren Bildungsprinzip zu durchschauen und eine Berechnungsvorschrift anzugeben. Es gibt, wie man heute weiß, noch weitere befreundete Zahlenpaare, die man auf diese Weise nicht berechnen kann.

Euler leitet eine Methode her, wie man die Anzahl der möglichen Zerlegungen einer natürlichen Zahl in lauter verschiedene Summanden berechnen kann, und beweist, dass diese Anzahl genauso groß ist wie die Anzahl der Zerlegungen einer natürlichen Zahl in lauter (nicht notwendig verschiedene) ungerade Summanden. Auch diesen Beweis führt er wieder unter Verwendung von unendlichen Summen und Produkten.

Beispiel: Die Zahl 7 lässt sich auf jeweils vier Arten zerlegen.

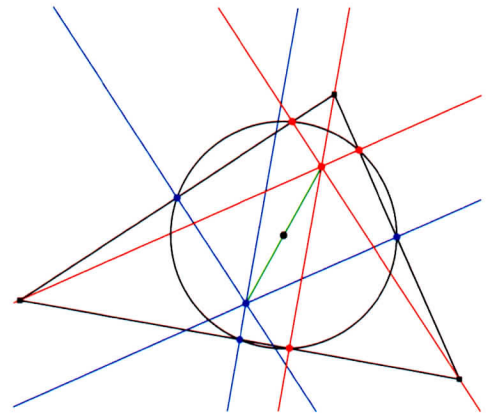
$$\begin{aligned} 7 &= 1 + 6 = 2 + 5 \\ &= 3 + 4 = 1 + 2 + 4 \quad \text{und} \\ 7 &= 5 + 1 + 1 = 3 + 3 + 1 \\ &= 3 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Euler beschäftigt sich auch intensiv mit geometrischen Problemen; er entdeckt beispielsweise, dass in jedem beliebigen Dreieck der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden (der Schwerpunkt des Dreiecks), der Schnittpunkt H der Höhen (der Höhenpunkt des Dreiecks) und der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten (der Umkreismittelpunkt des Dreiecks) auf einer Geraden liegen, der eulerschen Geraden, wobei die Strecke MH durch den Punkt S im Verhältnis 1 zu 2 geteilt wird.



Die Euler-Gerade (grün) verläuft durch den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (schwarz), der Höhen (rot) und der Mittelsenkrechten (blau) eines beliebigen Dreiecks.

Und um den Mittelpunkt der Strecke MH kann man einen Kreis, den eulerschen Kreis, zeichnen, der durch die Fußpunkte aller Höhen und Mittelsenkrechten verläuft.



Der eulersche Kreis

Um 1750 findet Euler heraus, dass bei konvexen Polyedern für die Anzahlen der Ecken e , der Kanten k und der Flächen f ein einfacher Zusammenhang gilt: $e - k + f = 2$. Das ist der eulersche Polyedersatz.

1736 beantwortet Euler die Anfrage des Bürgermeisters von Danzig, die als »Königsberger Brückenproblem« berüchtigt geworden ist: Ist es möglich, einen Rundgang durch Königsberg so durchzuführen, dass man dabei jede der sieben Brücken über den Alten und den Neuen Pregel, welche die Insel mit den umliegenden Stadtteilen verbinden, genau einmal überquert?

In seiner 13-seitigen Lösung legt er dar, warum dies nicht möglich ist, und formuliert ein allgemein gültiges Kriterium für die Existenz eines solchen Rundwegs. Von der mathematischen Substanz seiner Untersuchung ist er nicht überzeugt: »Du siehst also ..., dass diese Lösung ihrem Charakter gemäß kaum Beziehungen zur Mathematik hat, und ich verstehe nicht, warum sie vom Mathematiker eher erwartet werden sollte als von irgendeinem anderen Menschen, denn diese Lösung stützt sich allein auf die Vernunft, und es ist nicht nötig, zu ihrer Auffindung irgendwelche der Mathematik eigenen Prinzipien heranzuziehen.«

Mit diesem Beitrag eröffnet Euler ein neues Gebiet der Mathematik, die Graphentheorie. Heute spricht man allgemein von einem eulerschen Graphen, wenn es einen geschlossenen Streckenzug gibt, der jede Kante (Strecke) genau einmal durchläuft. Das oben genannte allgemein gültige Kriterium ist ganz einfach: Ein Graph ist genau dann ein eulerscher Graph, wenn an jedem Knoten die Anzahl der Kanten, die diesen Knoten mit seinesgleichen verbinden, gerade ist.



CARL FRIEDRICH GAUSS

(30. 4. 1777 – 23. 2. 1855)

Bereits zu Lebzeiten wird der in Braunschweig geborene Carl Friedrich Gauß als *princeps mathematicorum* (Fürst der Mathematiker) bezeichnet. Die Zahl seiner mathematischen Entdeckungen ist schier unfassbar.

Seine außergewöhnliche Begabung wird bereits in der Volksschule erkannt. Über den neunjährigen Gauß wird berichtet, dass er in kürzester Zeit mit einer Rechenaufgabe fertig ist, die sein Lehrer Büttner der Klasse aufgetragen hat:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$$

Sein Trick: Von außen nach innen vorgehend, fasst er jeweils die kleinste und die größte Zahl zu einer Summe zusammen: $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ..., $50 + 51$; das ergibt 50-mal die Summe 101 ...

Lehrer Büttner spürt, dass er diesem Jungen nicht wirklich etwas beibringen kann, und schenkt ihm ein Schulbuch über Arithmetik, das sich dieser selbstständig erarbeitet. Zusammen mit seinem Schüllassistenten Martin Bartels (1769–1836) überzeugt Büttner die in dieser Hinsicht überforderten Eltern (der Vater verdient den Lebensunterhalt als Lehmmaurer und Hausschlichter; die Mutter kann kaum lesen und schreiben), dass ihr Sohn unbedingt in eine höhere Schule wechseln muss.

Vom elften Lebensjahr an besucht Gauß das Gymnasium Catharineum; mit 14 Jahren wird er dem Herzog Carl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig vorgestellt, der ihm ein Stipendium gewährt und ihm die Aufnahme eines Studiums am Collegium Carolinum (heute: Technische Universität Braunschweig) ermöglicht.

Von 1795 an studiert Gauß Mathematik, Physik und Klassische Philologie an der Universität Göttingen, da diese über eine große-

re Bibliothek verfügt. Sein Physikprofessor Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799) weckt sein lebenslanges Interesse am Experimentieren. Nach anfänglichen Zweifeln, welchen Studienschwerpunkt er endgültig wählen soll – Gauß ist auch in hohem Maße sprachbegabt –, gibt schließlich am 30. März 1796 eine geniale Eingebung zu einem jahrtausendealten geometrischen Problem den Ausschlag.

Gauß erkennt, welche der regelmäßigen Vielecke ausschließlich unter Verwendung von Zirkel und Lineal konstruiert werden können: Ein reguläres n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n als Teiler nur Potenzen von 2 oder fermatsche Primzahlen der Form

$$p = 2^{2^m} + 1, \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

hat. Seit der Antike weiß man, wie man reguläre n -Ecke für

$$n = k \cdot 2^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k \in \{3, 5, 15\}$$

konstruieren kann; seitdem gab es keine Fortschritte mehr! Konkret kann Gauß für

$$p = 2^{2^2} + 1,$$

also für das reguläre Siebzehneck, eine Konstruktion angeben.

Mit diesem Ereignis beginnt Gauß, ein Tagebuch in lateinischer Sprache zu verfassen (»Notizenjournal«), in dem er bis zum Jahr 1814 insgesamt 146 »Entdeckungen« notiert. Diese Notizen werden erst Jahre nach seinem Tod entdeckt und sehr viel später veröffentlicht; viele Prioritätenstreitigkeiten klären sich daraufhin zu seinen Gunsten.

Beispielsweise weiß man aus den Eintragungen, dass Gauß sich bereits als Jugendlicher mit den Primzahlen und ihrer Verteilung beschäftigt hat. Vielleicht hat die ständige Benutzung von Logarithmentafeln als Rechen-

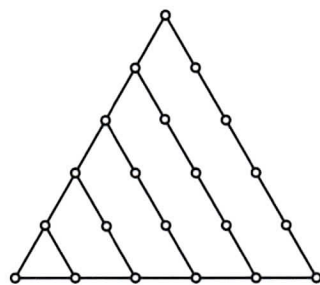


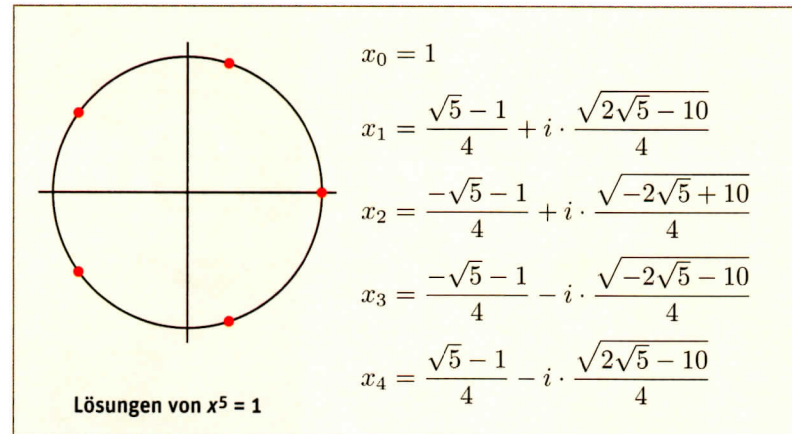
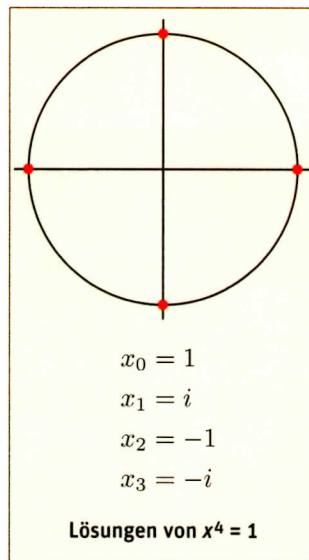
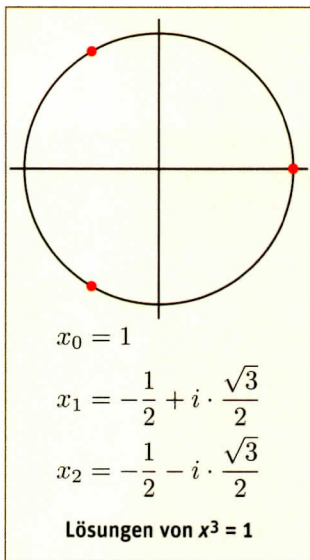
x	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
$\pi(x)$	4	25	168	1229	9592	78 498	664 579
$\frac{x}{\pi(x)}$	2,5	4,0	6,0	8,1	10,4	12,7	15,0
Zuwachs		+2,0	+2,1	+2,3	+2,3	+2,3	

$\pi(x)$ ist die Anzahl der Primzahlen unterhalb von x ; $x/\pi(x)$ wächst mit jeder Zehnerpotenz um ungefähr $\ln(10) \approx 2,3$.

hilfsmittel, insbesondere auch das Rechnen mit der Zahl $\ln(10) \approx 2,3$, ihn mit 15 Jahren zu der Vermutung kommen lassen, dass die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen, die kleiner sind als x , ungefähr proportional zu $x/\ln(x)$ ist – ein Satz, der erst 100 Jahre später exakt bewiesen werden kann.

Auch findet sich ein »EYPHKA« (Heureka – ich habe es gefunden) in einer der Tagebuch-Aufzeichnungen von 1796 zusammen mit: $\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta$. Da hat Gauß gerade einen Beweis der von Pierre de Fermat (S. 36) aufgestellten Vermutung entdeckt: Jede positive ganze Zahl lässt sich als Summe von höchstens drei Dreieckszahlen darstellen, wobei die Folge der Dreieckszahlen gegeben ist durch 1, 3, 6, 10, 15, ...





und $x^2 \equiv q \pmod{p}$ entweder beide lösbar oder beide nicht lösbar, es sei denn, p und q lassen bei der Division durch 4 den Rest 3; in diesem Fall ist die eine Gleichung lösbar, die andere nicht. Einige Beispiele:

► Die Gleichung $x^2 \equiv 5 \pmod{7}$ ist nicht lösbar, das heißt, in der Zahlenfolge 5, 12, 19, 26, 33, 40, ... tritt keine Quadratzahl auf, denn die »reziproke« Gleichung $x^2 \equiv 7 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{5}$ hat keine Lösung. Es gibt keine Quadratzahl, die 2 oder 7 als Endziffer hat.

► Die Gleichung $x^2 \equiv 5 \pmod{11}$ ist lösbar, denn in der Zahlenfolge 5, 16, 27, 38, 49, 60, ... treten offensichtlich Quadratzahlen auf. Dann muss auch die reziproke Gleichung $x^2 \equiv 11 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$ mindestens eine Lösung haben (es gibt Quadratzahlen, die 1 oder 6 als Endziffer haben).

► Die Gleichung $x^2 \equiv 3 \pmod{11}$ ist lösbar, denn in der Zahlenfolge 3, 14, 25, 36, 47, 58, ... kommen Quadratzahlen vor; dann hat die reziproke Gleichung $x^2 \equiv 11 \pmod{3} \equiv 2 \pmod{3}$ keine Lösung, das heißt, in der Zahlenfolge 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ... tritt keine Quadratzahl auf.

Als Kreisteilungsgleichungen werden Gleichungen der Form $x^n = 1$ bezeichnet, weil man ihre n Lösungen auch notieren kann als

$$x_k = \cos\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right)$$

mit $k=0, 1, 2, \dots, n-1$. Zeichnet man diese Punkte, so wie Gauß es ab 1820 praktiziert, in der komplexen Ebene ein, in der die Zahl 1 nach rechts und die Zahl i nach oben abgetragen wird und die heute gaußsche Zahlenebene heißt, dann sind es die Eckpunkte von regelmäßigen n -Ecken auf dem Einheitskreis (Bilder oben).

Gauß ist mit einem Schlag ein berühmter Mann. Einen Ruf nach St. Petersburg lehnt er aus Dankbarkeit dem Herzog gegenüber ab – und hofft, dass dieser ihm in Braunschweig eine Sternwarte baut. Sein besonderes Interes-

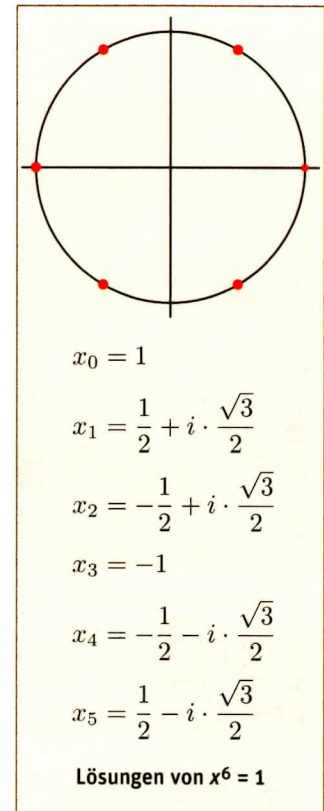
se an der Astronomie wird durch eine weitere sensationelle Leistung verstärkt, die ihn auch unter Nichtmathematikern bekannt macht:

Der italienische Astronom Giuseppe Piazzi entdeckt am 1. Januar 1801 den Planetoiden Ceres, verliert aber nach wenigen Tagen dessen Spur, als der Planet hinter der Sonne verschwindet. Gauß berechnet auf Grund der Messdaten Piazis die Bahn des Planetoiden nach der Methode der kleinsten Quadrate und ermöglicht so dessen Wiederentdeckung im folgenden Jahr durch Heinrich Olbers.

Dieses Verfahren, den Messfehler zu minimieren, indem man die Summe der quadratischen Abweichungen zu einem möglichen Modell betrachtet, hat er sich bereits als 17-Jähriger ausgedacht. Die Theorie hierzu und die Beschreibung der praktischen Anwendung in der Astronomie fasst er 1809 in der Schrift »Motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium« (»Bewegung der Himmelskörper, welche die Sonne in Kegelschnitten umkreisen«) zusammen. Auch hier gibt es wieder einen Prioritätenstreit, da Legendre unabhängig von Gauß 1806 die gleiche Methode vorschlägt.

Als der Herzog von Braunschweig 1807 in der Schlacht von Jena und Auerstedt schwer verwundet wird und stirbt, muss Gauß eine Astronomieprofessur in Göttingen annehmen, um seinen Lebensunterhalt und den seiner neu gegründeten Familie zu sichern. Dass dies mit Lehrverpflichtungen verbunden ist, missfällt ihm, und er sucht stets nach Möglichkeiten, diese gering zu halten.

Seine glückliche Ehe mit Johanna Osthoff währt gerade einmal vier Jahre, als diese bei der Geburt des dritten Kindes stirbt. Um die Kinder zu versorgen, heiratet er eine Freundin seiner Frau, Minna Waldeck, und hat auch mit dieser drei Kinder. Als auch die zweite Frau 1831 stirbt, kümmert sich seine jüngste Tochter Therese um den Haushalt, in dem auch Gaußens Mutter nach dem Tod des Va-





Gauß und Bessel, Nicaragua 1994



Gaußsche Glockenkurve



Heliotrop



János Bolyai,
Ungarn 1960

ters lebt; diese stirbt 1839 im Alter von 95 Jahren.

Als Leiter der Sternwarte in Göttingen beschäftigt Gauß sich mit der Verbesserung des Baus von Teleskopen und untersucht, wie man möglichst fehlerfreie Optiken bauen kann. Dabei steht er in vielfältigem Kontakt mit dem Leiter der Sternwarte in Königsberg, Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846).

Im Zusammenhang mit den astronomischen Untersuchungen entdeckt Gauß, dass zufällige Beobachtungsfehler normalverteilt sind. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(gaußsche Dichtefunktion) ist eine Glockenkurve, die auf dem letzten Zehnmarkschein (gültig von 1989 bis 2001) abgebildet ist.

Gauß sammelt 1797 erste Erfahrungen bei der Vermessung des Königreichs Westfalen, die dessen Herrscher, König Jérôme, ein Bruder Napoleons, durchführen lässt. 1818 übernimmt er nicht nur die Leitung der Vermessung des Königreichs Hannover, sondern führt sie über 14 Jahre hinweg selbst durch – ohne Rücksicht auf die damit verbundenen körperlichen Strapazen. Er verbessert dabei die Methoden der Geodäsie auf vielfältige Weise: Er erfindet das Heliotrop, eine Vorrichtung, die das Sonnenlicht mit Spiegeln in die Richtung des bis zu 100 Kilometer entfernten Beobachters lenkt, entwickelt die Fehlerrechnung weiter, ersinnt ein Verfahren zur systematischen Lösung linearer Gleichungssysteme (den gaußschen Algorithmus) und Methoden zur möglichst unverzerrten Darstellung der gekrümmten Erdoberfläche mit Hilfe von Kartenprojektionen (gaußsche Koordinaten).

Mit dem gaußschen Algorithmus kann man beispielsweise das folgende System aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten

schrittweise auf Dreiecksgestalt bringen und dann von unten nach oben lösen:

$$1x + 2y + 1z = +8$$

$$1x - 1y + 3z = +8$$

$$1x - 2y - 1z = -6$$

$$1x + 2y + 1z = +8$$

$$-3y + 2z = +0$$

$$-1y - 4z = -14$$

$$1x + 2y + 1z = +8$$

$$-3y + 2z = +0$$

$$-14z = -42$$

$$x = +1$$

$$y = +2$$

$$z = +3$$

Angeregt durch seine praktischen geodätischen Arbeiten, beschäftigt sich Gauß intensiv mit Fragen der Geodäsie und der Differentialgeometrie, also der Krümmung von Flächen im dreidimensionalen Raum (ein Krümmungsmaß heißt heute gaußsche Krümmung) sowie der Bestimmung des Inhalts gekrümmter Flächen, der mit Hilfe des gaußschen Integralsatzes berechnet werden kann.

Bereits im Geometrieunterricht der Schule kommen ihm erste Zweifel daran, ob die euklidische Geometrie die einzig mögliche ist. Gibt es auch Geometrien, bei denen die Winkelsumme im Dreieck nicht gleich 180° ist?

Euklid gründete seine systematisch deduktiv aufgebaute Geometrie auf fünf »Axiome« oder »Postulate«; das fünfte, das so genannte Parallelenaxiom (»Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden genau eine Parallele«), klingt weniger elementar als die anderen, weshalb die Geometer im-

mer wieder – vergeblich – versuchten, es aus den übrigen herzuleiten. Um 1817 erkennt Gauß, dass das unmöglich ist, und untersucht die Frage, welche Art von Geometrie sich ergibt, wenn man das fünfte Postulat verwirft. Er diskutiert seine Ansätze zwar mit seinem Freund Farkas Bolyai, scheut sich aber, seine Überlegungen zu veröffentlichen. Hat doch der Philosoph Immanuel Kant wenige Jahre zuvor in seiner »Kritik der reinen Vernunft« in autoritärer Weise festgestellt, dass die Geometrie des Euklid denknötwendig, also unumstößlich wahr sei. Unabhängig von Gauß und voneinander entwickeln der russische Mathematiker Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1797–1856) und János Bolyai (1802–1860), der Sohn von Farkas Bolyai, eine »neue« Geometrie ohne das Parallelenaxiom und gelten damit als Entdecker der nichteuklidischen Geometrie (die Bezeichnung stammt von Gauß).

Zum ersten Mal tritt János Bolyai ab 1823 damit an die Öffentlichkeit; Lobatschewski, der im russischen Kasan bei Martin Bartels (dem ehemaligen Assistenten an der Braunschweiger Volksschule) Mathematik studiert hat, hält 1826 einen Vortrag über eine »imaginäre« Geometrie und verfasst mehrere Aufsätze, die im Westen Europas erst bekannt werden, als ein Beitrag 1837 in französischer Sprache erscheint. Gauß soll im Jahr 1846 über die Entdeckung Bolyais gesagt haben: »Ihn zu loben, würde bedeuten, mich selbst zu loben«, und über die Veröffentlichung Lobatschewskis, dass er dessen Einsichten bereits 54 Jahre früher gehabt habe. Allerdings ist er von den Arbeiten Lobatschewskis so beeindruckt, dass er dessen Ernennung zum korrespondierenden Mitglied der Königlich Akademie der Wissenschaften veranlasst, und da er im Selbststudium auch Russisch gelernt hat, kann er die Schrift im Original lesen.

1828 lernt Gauß auf einer Tagung in Berlin den jungen Physiker Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) kennen; es gelingt ihm, diesen für die Übernahme einer Physikprofessur in Göttingen zu gewinnen. Gemeinsam entwickeln die beiden eine Theorie des Magnetismus, erfinden das Magnetometer und nutzen die Ablenkung von Kompassnadeln in elektrisch erzeugten Magnetfeldern zur Übertragung von Nachrichten zwischen der Sternwarte und dem physikalischen Institut; allerdings werten sie diese zukunftssträchtige Erfindung des Telegrafen nicht wirtschaftlich aus.

Zusammen mit dem angesehenen Naturforscher Alexander von Humboldt (1769–1859) gründen sie 1836 den »Magnetischen Verein«, die erste internationale Forschungsgemeinschaft, die sich zur Aufgabe setzt, weltweit die zeitlichen und räumlichen Verände-

rungen des Erdmagnetismus zu erforschen. Das von Gauß und Weber entwickelte CGS-System mit den Grundeinheiten Zentimeter (cm), Gramm (g) und Sekunde (s) wird 1881 auf einem wissenschaftlichen Kongress in Paris offiziell eingeführt und die Einheit Gauß für die magnetische Flussdichte (magnetische Induktion) definiert ($1 \text{ Gauß} = 10^{-4} \text{ Tesla}$). Eine der Methoden zur Bestimmung des erdmagnetischen Feldes wird heute noch als gaußsche Methode bezeichnet.

Als Weber 1837 aus politischen Gründen Göttingen verlassen muss (sieben Göttinger Professoren, darunter auch Gaußens Schwiegersohn Heinrich Ewald sowie die Brüder Jacob und Wilhelm Grimm, werden entlassen, weil sie gegen die Aufhebung der Verfassung durch den neuen König von Hannover protestiert haben), kann sich Gauß nicht zu einer öffentlichen Stellungnahme durchringen, vielleicht wegen seiner prinzipiell konservativ-monarchistischen Einstellung.

1839 verfasst Gauß eine allgemeine Theorie der Anziehungs- und Abstoßungskräfte (Potenzialtheorie). In seinen letzten Lebensjahren erstellt er noch ein Gutachten für die Witwenkasse der Göttinger Universität, eine erste Berechnung von Rentenversicherungsbeiträgen auf dem Hintergrund von Sterbetafeln und Wahrscheinlichkeitsüberlegungen.

Als Gauß 1855 stirbt, hinterlässt er eine gewaltige wissenschaftliche Lebensleistung in vielen Gebieten der Mathematik, der Physik und der Astronomie. Bei der Durchsicht seiner Unterlagen und der Tagebücher entdeckt man, dass sich die scheinbare Missachtung der Pionierarbeiten etlicher junger Mathematiker wie Niels Henrik Abel (1802–1829) und János Bolyai dadurch erklären lässt, dass er deren Entdeckungen lange vor ihnen gemacht, aber nichts darüber veröffentlicht hat, weil es ihm noch nicht vollständig erschien – gemäß seinem Leitspruch *Pauca sed matura* (Weniges, aber Reifes).

Nicht für reif hält er beispielsweise im Jahr 1811 einen Satz über komplexe Funktionen, den 14 Jahre später von Augustin Cauchy (S. 74) entwickelten Hauptsatz der Funktionentheorie, oder im Jahr 1819 seine Entdeckung der nichtkommutativen Multiplikation von 4-dimensionalen Objekten, also die von William Rowan Hamilton (1805–1865) im Jahr 1843 entdeckten Quaternionen.

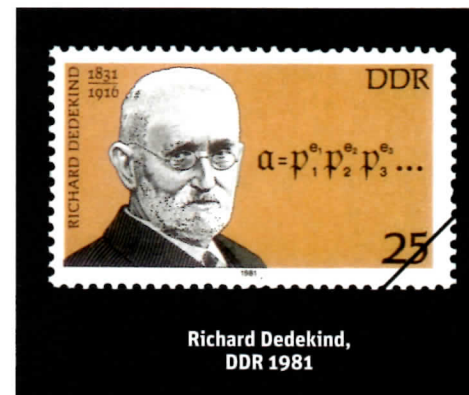
Gleichwohl fördert er einige seiner Studenten, die von ihm promoviert werden, wie zuletzt Richard Dedekind (1831–1916, »Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale«) und Bernhard Riemann (1826–1866, »Hypothesen, welche der Geometrie zugrundeliegen«).



Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski, Sowjetunion 1951



William Rowan Hamilton, Irland 1943



Richard Dedekind, DDR 1981

AUGUSTIN CAUCHY

(21. 8. 1789 – 23. 5. 1857)



Frankreich 1989



André Marie Ampère,
Frankreich 1936



Lazare Carnot,
Frankreich 1950

Augustin Louis Cauchy wird in unruhigen Zeiten in Paris geboren – nur wenige Wochen nach der Erstürmung der Bastille. Der königstreue Vater Louis François, bis zur Revolution in Polizeidiensten, verliert bald seinen Posten und flieht mit seiner Familie aus Paris. Erst nach Ende der Schreckensherrschaft kehrt er zurück; unter Napoleon macht er Karriere und wird Generalsekretär des Senats. Aus der Bekanntschaft mit dem Senator Joseph Louis Lagrange und dem Innenminister Pierre-Simon Laplace entwickelt sich eine Freundschaft. Die beiden Freunde erkennen das besondere mathematische Talent des jungen Augustin; Lagrange empfiehlt aber zunächst den Besuch einer Schule mit humanistischem Schwerpunkt, weil er befürchtet: »Er wird ein großer Mathematiker werden, aber er wird kaum seine Muttersprache schreiben können.«

Mit 15 Jahren dann besucht Augustin Cauchy die École Polytechnique, wo er Analysis bei André Marie Ampère (1775–1836) lernt, mit 18 Jahren tritt er in die Ingenieurschule für Brücken- und Straßenbau ein. Nach Abschluss des Studiums arbeitet er im Hafen von Cherbourg, von wo aus Napoleon seine Invasionsflotte nach England aussenden möchte.

In seiner knappen Freizeit beschäftigt er sich mit mathematischen Fragen, reicht einen ersten wissenschaftlichen Beitrag zur Verallgemeinerung des eulerschen Polyedersatzes ein. Die hohe Arbeitsbelastung verursacht bei ihm Phasen der Depression; sein Gesundheitszustand, der seit seiner frühen Kindheit, in der er unter Hunger zu leiden hatte, nicht zum Besten stand, verschlechtert sich. Erfolglos bewirbt er sich an verschiedenen Akademien in Paris um eine Stelle als Dozent.

Erst das Ende der napoleonischen Herrschaft macht ihm, dem strengen Katholiken

und Monarchisten, den Weg frei zu einer Karriere; er wird Dozent, dann Professor an der École Polytechnique, gewinnt mit einem Beitrag zur Wellentheorie einen Wettbewerb der Akademie der Wissenschaften.

Als Lazare Carnot (1753–1823) und Gaspard Monge (1746–1818) aus politischen Gründen aus der Akademie entlassen werden, wird er zum Mitglied dieser angesehenen Institution ernannt (nicht gewählt).

Seine mathematischen Veröffentlichungen beeindruckten die wissenschaftliche Welt, aber seine schroffen, arroganten, oft beleidigenden Umgangsformen erschweren die Zusammenarbeit mit ihm. Drei Jahre lang lässt er die von Niels Hendrik Abel (1802–1829) bei der Akademie eingereichten bahnbrechenden Papiere zur Algebra liegen und qualifiziert diese schließlich (nach dessen frühen Tod) sogar noch ab. Abel charakterisiert die beiden Seiten Cauchys in zutreffender Weise: »Cauchy ist verrückt, und man kann nichts dagegen tun, aber er ist der Einzige, der weiß, wie man Mathematik machen sollte.«

Cauchy hält Vorlesungen zur Analysis; dabei definiert er, in einem strengeren Sinne als bisher üblich, den Begriff des Grenzwerts sowie Bedingungen für die Konvergenz von Reihen, die dann auch eine exakte Definition des Integrals ermöglichen. Bereits 1814 führt er als Erster komplexwertige Funktionen ein und stellt Bedingungen für deren Differenzierbarkeit auf (die cauchy-riemannschen Differenzialgleichungen). Er erweitert den Begriff des Integrals über einem Intervall in $\mathbb{R}$ für Wege in der komplexen Zahlenebene und leitet Sätze für die Berechnung der Integrale über derartige Wege her (cauchyscher Integralsatz).

Die Ausarbeitungen seiner – fachlich revolutionären – Vorlesungen werden schnell in andere Sprachen übersetzt und gelten über Jahrzehnte als mathematische Standardwerke.

Die Präzisierung der Begriffe findet keine große Gegenliebe bei seinen Studenten, die hieran nicht gewöhnt sind und seine (manchmal sprunghaften) Ausführungen für zu theoretisch halten; vor allem eckt er mit seiner konservativen politischen Grundeinstellung an und seinen in missionarischer Weise verkündeten streng religiösen Ansichten.

Der Sturz des Königs im Jahre 1830 veranlasst ihn zur Emigration: Er will auf den neuen (Bürger-)König Louis Philippe keinen Treueeid schwören. In Turin bietet ihm der König von Piemont einen Lehrstuhl für theoretische Physik an. Er fühlt sich geehrt, in Prag als Mathematik- und Physiklehrer für den Enkel des französischen Exkönigs tätig sein zu können; für diese – wohl nicht sehr erfolgreiche – Tätigkeit verleiht dieser ihm den Titel eines Barons, auf den er in der Folgezeit großen Wert legt. Inwieweit er sich dort auch mit Bernard Bolzano austauscht, der ebenfalls eine präzisere Beweisführung in der Mathematik fordert, lässt sich heute nicht mehr klären. Nach seiner Rückkehr nach Paris wird er zwar wieder in die Akademie aufgenommen; es gelingt ihm jedoch nicht, irgendeinen der von ihm angestrebten Posten zu erhalten.

Die Zeit von 1839 bis 1848 ist Cauchys fruchtbarste Schaffensperiode: Etwa 300 (von insgesamt 789) Schriften veröffentlicht er in der Zeitschrift der Akademie, so dass diese sich genötigt sieht, den Umfang der eingereichten Artikel zu begrenzen.

Nach der Februarrevolution 1848 kommen nicht, wie von Cauchy erhofft, die Bourbonen an die Macht, sondern Napoleon III. Dennoch erhält Cauchy wegen seiner unbestrittenen fachlichen Kompetenz eine Professur – diesmal ohne Treueeid. Seine letzten Jahre werden allerdings durch einen Prioritätsstreit überschattet, bei dem er rechthaberisch nicht zugeben will, dass ein anderer eine Idee vor ihm hatte.

Cauchy verdanken wir eine Fülle von mathematischen Sätzen und Kriterien, zum Beispiel das Konvergenzkriterium (das Bolzano schon vier Jahre vor ihm hatte, siehe S. 72):

Cauchysches Konvergenzkriterium: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine Nummer n_0 gibt derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Er beweist die Konvergenz der geometrischen Reihe für $|q| < 1$ und leitet hieraus die heute nach ihm benannten Konvergenzkriterien her: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit lauter positiven Gliedern und gibt es eine Zahl $0 < q < 1$, so dass von einer gewissen Nummer

an $(a_{n+1}/a_n) \leq q < 1$ (Quotientenkriterium) beziehungsweise $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ (Wurzelkriterium) gilt, dann ist die Reihe (die Folge der Partialsummen) der a_n konvergent.

Cauchyscher Verdichtungssatz: Die Reihe (a_n) konvergiert genau dann, wenn die Folge der Summen der Glieder $1 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, 4 \cdot a_4, \dots, 2^k \cdot a_{2^k}, \dots$ konvergent ist.

Cauchyscher Produktsatz: Sind die Reihen (a_n) und (b_n) absolut konvergent gegen die Grenzwerte A und B , dann ist auch die Produktreihe $(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)$ absolut konvergent gegen den Grenzwert $A \cdot B$.

Cauchy führt einen exakten Beweis des Satzes von Taylor über die Reihenentwicklung mehrfach differenzierbarer Funktionen, gibt eine Methode an, wie man den Konvergenzradius für diese Reihe bestimmen kann, außerdem eine Abschätzung des Fehlers bei Abbruch nach dem n -ten Summanden (cauchysches Restglied).

Er zeigt, dass das geometrische Mittel von n Zahlen höchstens so groß ist wie das arithmetische Mittel

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

und beweist die nach ihm benannte Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

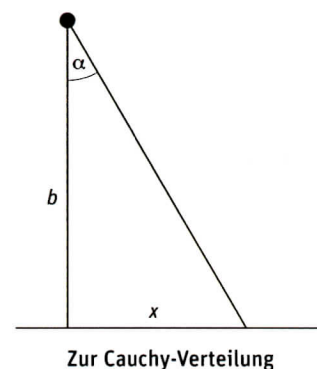
Nach ihm ist auch die Verteilung einer stetigen Zufallsgröße benannt, die beschreibt, in welcher Entfernung x ein Strahl eine horizontale Linie im Abstand $b = 1$ schneidet, wenn der Winkel α zufällig zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ gewählt wird (Cauchy-Verteilung); die zugehörige Dichtefunktion ist

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

Schließlich verfasst er auch noch eine große Zahl von Schriften über die Lösung von Funktionalgleichungen [Welche Typen von Funktionen erfüllen eine der Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(x+y) &= f(x) \cdot f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y) \quad ?] \end{aligned}$$

sowie zu physikalischen Fragen, zum Beispiel zur Elastizitäts- und Wellentheorie.



JOHN VON NEUMANN

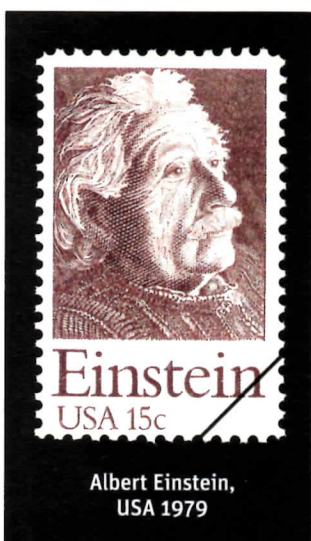
(28.12. 1903 – 8.2. 1957)



Ungarn 1992



Bertrand Russell,
Indien 1972



Albert Einstein,
USA 1979

Als Neumann János wurde er in Budapest geboren (im Ungarischen stellt man den Vornamen nach), als John von Neumann starb er in Washington D.C. Er war eines der größten mathematischen Genies des 20. Jahrhunderts.

János Neumanns Vater war ein reicher jüdischer Bankier, der sich 1913 den Adelstitel »Baron von« kaufte, aber diesen nicht benutzte; der Sohn legte später jedoch Wert auf das »von«. Mehrsprachig erzogen, soll sich János Neumann mit sechs Jahren auf Altgriechisch unterhalten haben; es wird berichtet, dass er achtstellige Zahlen im Kopf dividieren konnte und nach kurzem Ansehen einer Seite im Telefonbuch Namen und Telefonnummern auswendig wusste. Mit acht Jahren beschäftigte er sich mit Differenzialrechnung, las aber auch regelmäßig in einer Geschichtsenzyklopädie.

Bereits mit 17 Jahren, also noch während seiner Schulzeit am deutschsprachigen lutherischen Gymnasium, veröffentlicht er seinen ersten Beitrag in einer mathematischen Fachzeitschrift. Sein Vater wünscht jedoch nicht, dass er Mathematik studiert, da man hiermit keinen Reichtum erwerben könne; er einigt sich dann schließlich mit ihm auf ein Studium der Chemie – in Berlin, weil nach dem Ende des Ersten Weltkriegs die antijüdische Stimmung in Budapest bedrohlich geworden ist. János pendelt zwischen den Hochschulen in Berlin, Budapest und Zürich. Gleichzeitig mit seinem Abschluss in Chemie in Zürich legt er in Budapest die Prüfung in Mathematik mit Auszeichnung ab, obwohl er die Vorlesungen nicht systematisch besuchen konnte.

George Pólya (1887–1985), der Jura, Sprachen, Literatur, Mathematik, Physik und Philosophie in Budapest studiert hat und in Zürich zeitweise sein Hochschullehrer im

Fach Mathematik ist, gesteht später, dass János Neumann sein einziger Student war, vor dem er selbst »Angst« gehabt habe; es sei kaum eine Vorlesung vergangen, in der er als Dozent ein Problem formuliert habe, für das sein »Student« nicht am Ende der Vorlesung eine Lösung hätte präsentieren können.

Auf Grund der Arbeiten von Georg Cantor (1845–1918) hatte sich Ende des 19. Jahrhunderts ein neues Gebiet der Mathematik entwickelt, die (aus späterer Sicht »naive«) Mengenlehre. 1901 entdeckt Bertrand Russell (1872–1970) einen Widerspruch, der sich ergibt, wenn man die Definition beliebiger Mengen zulässt: Gibt es eine Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten? In seiner Doktorarbeit gelingt von Neumann im Jahr 1925 der widerspruchsfreie, axiomatische Aufbau der Mengenlehre.

Er wird Rockefeller-Stipendiat bei David Hilbert (1862–1943) in Göttingen, arbeitet als jüngster Privatdozent an den Universitäten in Berlin und Hamburg. Ab 1930 nimmt er parallel zu seinen Tätigkeiten in Europa eine Tätigkeit als Gastdozent an der Universität Princeton auf; sein Ruf als mathematisches Genie verbreitet sich weltweit. 1933 gehört er mit Albert Einstein (1879–1955) zu den fünf ersten Professoren, die an das neu geschaffene Institute for Advanced Study in Princeton berufen werden. 1937 nimmt er die amerikanische Staatsbürgerschaft an.

1926 beschäftigt er sich mit den widersprüchlich erscheinenden Theorien der Physiker Werner Heisenberg (1901–1976) und Erwin Schrödinger (1887–1961) und versucht, beide Ansätze in einer mathematischen Theorie zu vereinen: »Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik« erscheint 1932.

Aus dieser Arbeit ergeben sich neue Impulse für die Funktionalanalysis, ein Gebiet der Mathematik, das sich allgemein mit Ei-

enschaften von Funktionenräumen beschäftigt («von-Neumann-Algebra»). 1936 verfasst er einen Beitrag zu einer neuen »Logik« der Quantenmechanik: Photonen können zueinander senkrecht stehende Polarisationsfilter nicht passieren; gemäß »klassischer« Logik dürfte es keine Rolle spielen, wenn man noch einen dritten Filter hinzunimmt. Stellt man den dritten Filter in diagonalen Richtung vor oder hinter die beiden Filter in den Weg der Photonen, so ändert sich tatsächlich nichts, wohl aber, wenn er dazwischen gestellt wird.

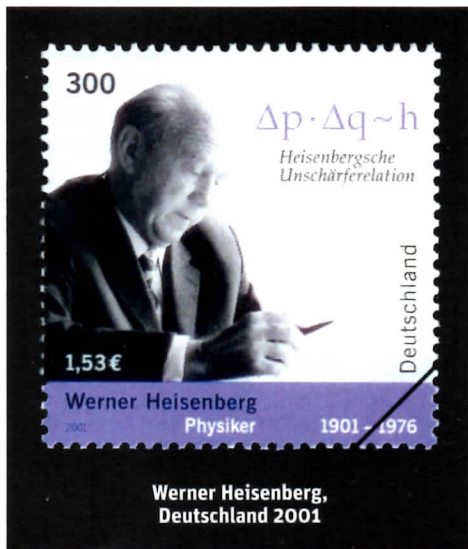
Von Neumann gilt als Begründer der mathematischen Spieltheorie; 1928 veröffentlicht er einen Beitrag zum »Minimax-Theorem«. Bei diesem mathematischen Satz geht es um die Strategie, den maximalen Verlust der betei-

siert die existierenden Rechnerkonzepte und entwickelt sie in seiner berühmten Schrift »First draft on a Report on the EDVAC« (*Electronic Discrete Variable Automatic Computer*) weiter. Wesentlich ist seine Erkenntnis, dass man die Programme nicht fest verdrahten, sondern ebenso wie Daten abspeichern sollte. Seitdem spricht man von der von-Neumann-Architektur der Rechner; nach ihr besteht ein Computer aus einem Rechenwerk, einem Steuerwerk, den In- und Outputgeräten und einem gemeinsamen Speicherwerk für Instruktionen und für Daten (was erst bei den jüngsten PC-Generationen geändert wurde). Er interessiert sich für biologische Informationsprozesse und untersucht neuronale Netze (Analogie von Computer und Gehirn).

Von 1937 an beschäftigt sich von Neumann mit Fragen der Mathematik in militärischen Anwendungen, zum Beispiel mit der Wirksamkeit von Bomben in Abhängigkeit von der Explosionshöhe, und verfasst eine Arbeit über »Schockwellen«. Die wichtigste Anwendung dieser Arbeit zeigt sich 1945 beim Atombombenabwurf über Hiroshima und Nagasaki. Er gehört zu den führenden Mitarbeitern des Manhattan-Projekts (Herstellung der ersten Atombombe) wie auch des Teams, das die erste Wasserstoffbombe konzipiert. In diesem Zusammenhang entwickelt er Simulationsmethoden (Monte-Carlo-Methode) und entwirft ein Verfahren zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen, die *middle square method*: Man startet mit einer 4-stelligen Zahl, deren Quadrat eine 8-stellige Zahl ergibt, von der dann die mittleren 4 Ziffern genommen werden, und wiederholt das Verfahren beliebig oft. Von Neumann lässt Kritik an der Qualität der so erzeugten Zahlen nicht gelten; man werde es schon merken, wenn die Simulation nicht brauchbar sei. Außerdem: »Wer mit arithmetischen Verfahren Zufallszahlen produzieren will, ist sowieso ein Sünder.«

In seinen Vorlesungen als Mathematikprofessor soll er oft sprunghaft in der Beweisführung gewesen sein und chaotisch im Tafelbild; Proteste der Studenten kümmern ihn wenig, vertritt er doch provokant die Meinung: »Mathematische Dinge versteht man nicht, man gewöhnt sich nur daran.« Und: »Wer Mathematik nicht für einfach hält, hat bloß noch nicht begriffen, wie kompliziert das Leben ist.«

Ende 1956 entdeckt man bei ihm Bauchspeicheldrüsen- und Knochenkrebs, Folgen seiner Anwesenheit bei den Nukleartests im Pazifik und der Arbeit in den Laboratorien von Los Alamos. Als John von Neumann stirbt, hat er 150 wissenschaftliche Schriften verfasst, davon je 60 in reiner und angewandter Mathematik und 20 in Physik.



Werner Heisenberg,
Deutschland 2001

ligten Spieler in einem Nullsummenspiel (die Summe von Gewinn und Verlust aller Spieler ist gleich null) minimal zu halten. 1937 verallgemeinert er dies zu Fragen des Gleichgewichts von Angebot und Nachfrage und verfasst 1944 zusammen mit Oskar Morgenstern (1902–1977) das Standardwerk der Ökonomie, »Theory of Games and Economic Behaviour«, in dem auch aufgezeigt wird, dass sich Tarifverhandlungen, strategische Unternehmensentscheidungen und zwischenstaatliche Konflikte mit Hilfe mathematischer Modelle beschreiben lassen.

1936 besucht Alan Turing (1912–1954) das Institut in Princeton, um dort zu promovieren; in seiner berühmten Schrift »On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem« beschäftigt er sich mit der Berechenbarkeit eines mathematischen Problems (so genannte Turing-Maschine).

Seine Anwesenheit in Princeton regt von Neumann an, sich stärker mit dem Bau von Rechenautomaten zu beschäftigen. Er analy-



Alan Turing,
St. Vincent 2000



Alan Turing und John von Neumann,
Portugal 2000



Ungarn 2003



USA 2005

ANDREI N. KOLMOGOROW

(25. 4. 1903 – 20. 10. 1987)



Nikolai Nikolajewitsch Luzin,
Russland 2000



Jakob Bernoulli,
Schweiz 1994

Eine der portugiesischen Millenniumsbriefmarken ist drei bedeutenden Mathematikern des 20. Jahrhunderts gewidmet: Von links nach rechts sind abgebildet: der Franzose Jules Henri Poincaré (1854–1912), der aus Brunn stammende Österreicher Kurt Gödel (1906–1978) sowie der Russe Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow.

Poincaré gilt als einer der letzten Universalisten sowohl in der Mathematik als auch in der Physik; seine zahlreichen Veröffentlichungen beschäftigten sich mit sehr unterschiedlichen Themen – von der Zahlentheorie angefangen bis hin zur Relativitätstheorie.

Gödel, der wohl bedeutendste Logiker des 20. Jahrhunderts, erschütterte im Jahr 1931 mit einer Arbeit die mathematische Grundlagenforschung: Sein berühmter »Unvollständigkeitssatz« besagt, dass grundsätzlich keines der denkbaren Axiomensysteme der Arithmetik so »vollständig« ist, dass sich alle Aussagen der Arithmetik beweisen lassen. Es gibt Aussagen, die sich aus diesem System weder herleiten lassen noch durch dieses widerlegt werden können.

Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow lernt seine Eltern nicht kennen: Die Mutter stirbt bei der Geburt; der Vater lebt wegen Mitgliedschaft in einer revolutionären Gruppe in der Verbannung; er kommt 1919 im Bürgerkrieg um. Die Schwester seiner Mutter adoptiert ihn und übernimmt die Erziehung; Andrei erhält den Familiennamen seines Großvaters. Von 1910 an besucht er eine höhere Schule in Moskau. Nach dem Schulabschluss 1920 arbeitet er eine Zeit lang als Eisenbahnschaffner, bevor er sein Studium an der Moskauer Universität aufnimmt. Außer für Mathematik interessiert er sich auch für Metallurgie sowie besonders für russische Geschichte. Später erzählt Kolmogorow gern eine

Anekdote über eine historische Seminararbeit, die er verfasst hatte. Sein Dozent bemängelte, dass es im Fach Mathematik vielleicht genügen mag, dass man zur Bestätigung einer Behauptung nur einen Beweis liefert; Historiker würden es jedoch vorziehen, ihre Thesen durch mehrere Argumente zu belegen ...

Dass er sich schließlich für Mathematik entscheidet, ist sicherlich auch seinem Lehrer Nikolai Nikolajewitsch Luzin (1883–1950) zu verdanken, der die ungewöhnliche Begabung des Studenten Kolmogorow erkennt. Bereits im Frühjahr 1922 verfasst dieser einen international beachteten Aufsatz über Operationen auf Mengen. Im Sommer des Jahres verblüfft er Experten mit dem Beispiel einer integrierbaren Funktion, deren zugehörige Fourier-Reihe fast überall divergent ist. (Eine Fourier-Reihe ist eine besondere Summenfolge, deren Summanden aus trigonometrischen Funktionstermen bestehen.)

Bevor er 1925 sein Examen ablegt, veröffentlicht er noch acht Beiträge zu unterschiedlichen Themen, darunter – in Zusammenarbeit mit Aleksandr Jakowlewitsch Chintschin (1894–1959) – einen ersten Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie, der sich mit dem so genannten schwachen Gesetz der großen Zahlen beschäftigt.

Jakob Bernoulli (1654–1705) hatte um 1700 ein Gesetz aufgestellt, das heute Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen genannt wird: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei (Bernoulli-)Versuchen der Unterschied zwischen der relativen Häufigkeit X/n und der zu Grunde liegenden Erfolgswahrscheinlichkeit p höchstens gleich einer vorgegebenen positiven Zahl ε ist, konvergiert mit wachsender Versuchsanzahl n gegen 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

Auf der schweizerischen Briefmarke ist derselbe Sachverhalt so beschrieben: Der Mittelwert von Versuchsergebnissen strebt gegen den Erwartungswert der Zufallsgröße.

1866 verallgemeinerte Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew (1821–1894) Bernoullis Aussage für Summen unabhängiger Zufallsgrößen und gab dazu einen genial einfachen Beweis an (Tschebyschew-Ungleichung).

Kolmogorows Beitrag von 1925 gibt drei Bedingungen an, unter denen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \cdot (X_1 + \dots + X_n) - \frac{1}{n} \cdot (E(X_1) + \dots + E(X_n)) \right| \leq \varepsilon \right) = 1$$

gilt.

Die Bedingungen beziehen sich auf die Folge der Summe der Zufallsgrößen, die Folge der zugehörigen Erwartungswerte und die der Varianzen – der Satz wird daher auch »Drei-Reihen-Satz« genannt.

In den folgenden Jahren publiziert Kolmogorow weitere Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie, aber auch zu anderen Gebieten der Mathematik. Mit Pawel Sergejewitsch Aleksandrov (1896–1982) reist er durch Europa und besucht die Universitäten in Berlin, Göttingen, München und Paris. 1930 erhält er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Moskauer Universität.

Als Hochschullehrer übt Kolmogorow zeit seines Lebens eine faszinierende Wirkung auf seine Studenten aus. Er kümmert sich persönlich um sie; auf den regelmäßig durchgeführten, gemeinsamen Wanderungen wird vor allem über Mathematik diskutiert. Kolmogorow verfasst auch Schulbücher und fördert mathematisch begabte Schüler. Mit dem 1933 in deutscher Sprache erscheinenden Werk »Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung« beeinflusst Kolmogorow in erheblichem Maß die weitere Entwicklung der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

David Hilbert (1862–1943) hatte im Jahr 1900 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris die – seiner Meinung nach – 23 wichtigsten mathematischen Probleme benannt, die einer Lösung bedürften. Als sechstes Problem stellte er die Frage, wie Mechanik und Wahrscheinlichkeitstheorie (die damals wegen der Anwendungsprobleme eher zur Physik gerechnet wurde) axiomatisiert werden könnten. Bei einem axiomatischen Aufbau geht man von grundlegenden Axiomen aus, von denen dann weitere Gesetze abgeleitet werden können, ähnlich, wie dies Euklid in der Geometrie geleistet hatte.

Vergeblich hatten sich vor Kolmogorow verschiedene Mathematiker darum bemüht,

geeignete Axiome zu formulieren. Der Ansatz von Richard von Mises (1883–1953), Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte relativer Häufigkeiten zu definieren, führte ebenfalls zu Schwierigkeiten.

Kolmogorows Ansatz dagegen ist einfacher. Er beschränkt sich darauf festzulegen, welche Eigenschaften Wahrscheinlichkeiten haben sollen und macht keine Aussage darüber, was Wahrscheinlichkeiten sind.

Man betrachte eine Menge S von möglichen Ausgängen eines Zufallsversuchs, auf der Mengenoperationen wie $\cup$ und $\cap$ definiert sind (eine so genannte Ereignisalgebra), sowie eine Funktion P , die den Teilmengen von S Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ zuordnet. Die Funktion P ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn die folgenden drei Eigenschaften gelten (die Kolmogorow-Axiome):

► Für jedes Ereignis $E \subseteq S$ ist die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eine reelle Zahl zwischen 0 und 1: $0 \leq P(E) \leq 1$.

► Das sichere Ereignis S hat die Wahrscheinlichkeit 1: $P(S) = 1$.

► Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung abzählbar vieler unvereinbarer Ereignisse ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse: $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots$, sofern $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Aus diesen »Grundsätzen« lassen sich andere Eigenschaften herleiten, beispielsweise die Komplementärregel oder die allgemeine Summenregel (Ein- und Ausschaltformel).

In den folgenden Jahren leistet Kolmogorow weitere fundamentale Beiträge zur Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, insbesondere zu Markow-Ketten; er befasst sich mit Turbulenzen im Rahmen der Strömungslehre, mit dynamischen Systemen (Anwendung auf die Planetenbewegung), mit Informations- und Algorithmentheorie (die Kolmogorow-Komplexität ist ein Maß für die Struktur von Zeichenketten); er publiziert auch Beiträge zur Logik, zur Analysis und zur Topologie. Mit Wladimir Iwanowitsch Smirnow (1887–1974) entwickelt er einen vielseitig einsetzbaren, nicht-parametrischen Anpassungstest; hierbei wird die Differenz zwischen empirischer und hypothetischer Verteilungsfunktion untersucht.

Auf Grund seiner großen wissenschaftlichen Verdienste wird er vielfach geehrt, erhält als einer der ersten Wissenschaftler den 1940 eingeführten Stalin-Preis, 1962 den Balzan-Preis (Preisgeld 1 Million Schweizer Franken), 1965 den Lenin-Preis, 1987 den Lobatschewski-Preis, 1980 den Wolf-Preis (Preisgeld 100 000 Dollar). Er wird Mitglied der Akademie der Wissenschaften der Sowjetunion und zahlreicher Länder in aller Welt.



Tschebyschew,
Sowjetunion 1946



Stalin-Preis,
Sowjetunion 1946