

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 13

СЕРИЯ

МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И АСТРОНОМИИ

Выпуск 3



ЛЕНИНГРАД
1966

УДК 533.70

Ю. Шлажа

МЕТОД МОМЕНТОВ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ

В аэродинамике разреженных газов большой интерес представляют задачи обтекания тел произвольной формы. В данной работе показаны пути решения такой проблемы. Сначала дается представление функции распределения через полиномы, ортогональные в произвольных областях пространства скоростей. При рассмотрении гиперзвуковых задач эти полиномы можно строить асимптотическим путем. Как пример, рассмотрен случай гиперзвукового продольного обтекания полубесконечной пластинки. Далее выписаны система интегральных моментных уравнений и выражения макропараметров газа через коэффициенты a_m^\pm разложения функции распределения. Указаны пути аналитического решения гиперзвуковых задач аэродинамики разреженных газов.

§ 1. Разложение функции распределения f по полиномам, ортогональным в произвольных областях Ω^\pm пространства скоростей

Обтекание тела разреженным одноатомным газом можно описывать системой кинетических уравнений С. В. Валландера [1], которая в стационарном случае имеет вид

$$f(\bar{r}, \bar{u}) = \begin{cases} \frac{1}{u_n} \tilde{\Phi}(\bar{r}_s, \bar{u}) \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau_s) + \int_0^{\tau_s} \Phi(\bar{r} - \tau \bar{u}, \bar{u}) \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau) d\tau & \bar{u} \in \Omega^+(\bar{r}), \\ \int_0^\infty \Phi(\bar{r} - \tau \bar{u}, \bar{u}) \Pi(\bar{r}, \bar{u}, \tau) d\tau & \bar{u} \in \Omega^-(\bar{r}). \end{cases} \quad (1,1)$$

Здесь $\bar{n} = \bar{n}(\bar{r}_s)$ — внешняя нормаль к поверхности тела; $\Omega^+(\bar{r})$ — конус в пространстве скоростей, содержащий все скорости \bar{u} , с которыми молекулы могут прийти с тела в точку \bar{r} без столкновений; $\Omega^-(\bar{r})$ — оставшаяся часть пространства скоростей.

Все рассуждения, проводимые в данной работе, можно распространить и на случай нестационарных задач.

Одним из методов решения кинетических задач является метод моментов, при котором функция распределения f представляется в виде разложения по ортогональным полиномам, и на основе уравнения Больцмана или (1,1) строится система уравнений для отыскания коэффициентов разложения. Эти коэффициенты, в свою очередь, дают возможность вычислить макропараметры газа.

Рассматривая разреженный газ в неограниченном пространстве, целесообразно представлять функцию распределения в виде разложения по полиномам, ортогональным во всем пространстве скоростей [2], [3]. Если выбрать в качестве весовой функции максвелловскую функцию распределения

$$f_0 = n_0 \left(\frac{h_0}{\pi} \right)^{3/2} \exp \{ -h_0 (\bar{u} - \bar{U}_0)^2 \}, \quad (1,2)$$

где $h_0 = \frac{m}{2kT_0}$; n_0 , \bar{U}_0 , T_0 — плотность, скорость и температура набегающего невозмущенного потока соответственно, то получаемые полиномы будут полиномами Эрмита, которые являются тензорами m -го ранга 3-го порядка.

При рассмотрении задачи Куэтта имеет смысл раскладывать функцию распределения f по полиномам, ортогональным в полупространстве скоростей. Это вызвано тем, что f терпит разрыв на плоскости $u_n = 0$, и целесообразно представлять функцию распределения при $u_n < 0$ и $u_n > 0$ [4], [5].

Такие представления функции распределения пригодны только для довольно узкого круга задач. В общем случае аэродинамики разреженных газов приходится иметь дело с задачами, в которых функция распределения $f(\bar{r}, \bar{u})$ терпит разрыв на некоторой конической поверхности, делящей пространство скоростей на два подпространства $\Omega^+(\bar{r})$ и $\Omega^-(\bar{r})$. В этом случае система интегральных уравнений для f имеет вид (1,1), и приобретает интерес разложение функции распределения f по полиномам ψ_m^\pm , ортогональным в Ω^+ и Ω^- с весом f_0 из (1,2). В дальнейшем все величины, обозначенные с „+“, относятся к части пространства скоростей Ω^+ , а обозначенные с „—“ к части Ω^- . Займемся построением полиномов ψ_m^\pm . Если ввести скалярное произведение

$$(\alpha, \beta)^\pm = \frac{1}{\varepsilon^\pm} \iiint_{\Omega^\pm} f_0 \alpha \beta d\bar{u}, \quad (1,3)$$

то условия ортонормированности полиномов ψ_m^\pm записываются в виде

$$(\psi_i, \psi_j)^\pm = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases} \quad (1,4)$$

и получаемые полиномы будут ортогональными в Ω^\pm с весом f_0 из (1,2). В (1,3) ε^\pm выбран так, чтобы $\psi_0^\pm = 1$.

Пусть функция распределения f терпит разрыв на произвольной конической поверхности в пространстве скоростей. При этом пространство \bar{u} распадается на две части: Ω^+ и Ω^- . Если рассматривается задача обтекания нескольких тел, то пространство скоростей распадается на несколько частей, но это несущественно для нашего рассмотрения. Так, для простоты рассмотрим обтекание разреженным газом только одного тела. Пусть

$$1; u_i; u_j; \dots; u_i u_{i_2} \dots u_{i_m}; \dots = \{u_i u_{i_2} \dots u_{i_m}\} \quad (1,5)$$

линейно независимые тензоры m -го ранга 3-го порядка, причем $i_m = 1, 2, 3; m = 0, 1, 2, \dots$ и u_{i_m} — компоненты скорости молекул. Составим из (1,5) последовательность $\{u_i u_{i_2} \dots u_{i_m}\}_{i_1 < i_2 < \dots < i_m}$, также состоя-

щую из линейно независимых элементов. Выпишем первые элементы этой последовательности

$$1, u_x, u_y, u_z, u_x^2, u_y^2, u_z^2, u_x u_y, u_x u_z, u_y u_z, u_x^2 u_y, u_y^3, u_z^2 u_y, u_x^3, u_x u_y^2, u_x u_z^2, u_x^2 u_z, u_y^2 u_z, u_z^3, u_x u_y u_z, \dots, \quad (1,6)$$

причем индексы x, y, z соответствуют индексам 1, 2, 3. Пронумеруем элементы (1,6) следующим образом:

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \dots \quad (1,7)$$

и ортонормируем их по обычной схеме [6]. При этом получим последовательность $\{\psi_i\}^\pm$ ортонормированных полиномов. Имеем

$$\theta_m^\pm = \varphi_m - \sum_{k=1}^{m-1} c_{mk}^\pm \psi_k^\pm, \quad \psi_m^\pm = \frac{\theta_m^\pm}{\|\theta_m\|^\pm}, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (1,8)$$

где

$$c_{mk}^\pm = (\varphi_m, \psi_k)^\pm. \quad (1,9)$$

Так как границы областей Ω^+ и Ω^- зависят от \bar{r} , то c_{mk}^\pm ввиду (1,3) являются функциями от \bar{r} , так что полученные полиномы ψ_m^\pm являются функциями от \bar{r} и \bar{u} . Тем самым разложение функции распределения f в областях Ω^\pm можно записать в виде

$$f^\pm(r, \bar{u}) = f_0(\bar{u}) \sum_{m=0}^{\infty} a_m^\pm(\bar{r}) \psi_m^\pm(\bar{r}, \bar{u}). \quad (1,10)$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_{ij}^\pm = \iint_{\Omega^\pm} f_0 \varphi_i \varphi_j d\bar{u}, \quad i, j=0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{ij}^\pm = \alpha_{ij}^\pm, \quad (1,11)$$

где f_0 и φ_i —функции из (1,2) и (1,7). Выразим (1,8) через (1,7) и (1,11). Соотношения (1,8) можно переписать в следующем виде:

$$\theta_m^\pm = \varphi_m - \sum_{k=1}^{m-1} b_{mk}^\pm \varphi_k, \quad \psi_m^\pm = \frac{\theta_m^\pm}{\|\theta_m\|^\pm}, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad (1,12)$$

где

$$b_{mk}^\pm = \frac{c_{mk}^\pm}{\|\theta_k\|^\pm} - \sum_{\substack{i=1 \\ i>k}}^{m-1} \frac{c_{mi}^\pm}{\|\theta_i\|^\pm} b_{ik}^\pm. \quad (1,13)$$

Так как $c_{mk}^\pm = (\varphi_m, \psi_k)^\pm$, то, подставляя сюда ψ_k^\pm , можно выразить c_{mk}^\pm через α_{ij}^\pm , а именно, используя (1,3), имеем

$$c_{mk}^\pm = \frac{1}{\varepsilon^\pm \|\theta_k\|^\pm} \left\{ \alpha_{mk}^\pm - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{mi}^\pm b_{ki}^\pm \right\}. \quad (1,14)$$

Подставляя (1,14) в (1,13), получим выражение для b_{mk}^\pm через α_{ij}^\pm , т. е.

$$b_{mk}^\pm = \frac{1}{\varepsilon^\pm \|\theta_k\|^\pm} \left\{ \alpha_{mk}^\pm - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{mi}^\pm b_{ki}^\pm \right\} - \sum_{\substack{i=1 \\ i>k}}^{m-1} \frac{b_{ik}^\pm}{\varepsilon^\pm \|\theta_i\|^\pm} \left\{ \alpha_{mi}^\pm - \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{ml}^\pm b_{il}^\pm \right\}. \quad (1,15)$$

Отсюда видно, что b_{mk}^{\pm} выражаются через α_{ij}^{\pm} . Зная b_{mk}^{\pm} , знаем и θ_m^{\pm} . Для вычисления ψ_m^{\pm} надо еще получить $\|\theta_m^{\pm}\|$. По (1,3), (1,11) и (1,12) имеем

$$\begin{aligned} \|\theta_m^{\pm}\| &= \frac{1}{\varepsilon^{\pm}} \iiint_{\Omega^{\pm}} f_0 \left[\varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} b_{mk}^{\pm} \varphi_k \right]^2 d\bar{u} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{\pm}} \left\{ \alpha_{mm}^{\pm} - 2 \sum_{k=0}^{m-1} b_{mk}^{\pm} \alpha_{mk}^{\pm} + \sum_{i,k=0}^{m-1} b_{mi}^{\pm} b_{mk}^{\pm} \alpha_{ik}^{\pm} \right\}. \end{aligned} \quad (1,16)$$

По условию, ε^{\pm} выбирается так, чтобы $\psi_0^{\pm} = 1$. Отсюда следует, что $\varepsilon^{\pm} = \varepsilon_{00}^{\pm}$. Полиномы ψ_m^{\pm} будут окончательно найдены, если будут вычислены интегралы α_{ij}^{\pm} при $i \geq j$ по (1,11). Рассмотренное построение полиномов ψ_m^{\pm} будет верно для произвольных областей в пространстве скоростей.

§ 2. Асимптотика коэффициентов α_{ij}^{\pm} при больших M

Рассмотрим обтекание тела произвольной формы одноатомным разреженным газом. При этом отметим, что система осей координат всегда может быть выбрана так, чтобы направление скорости \bar{U}_0 набегающего потока совпало с положительным направлением оси абсцисс (рис. 1).

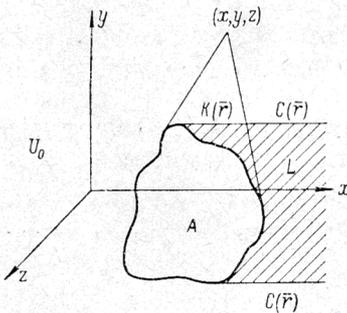


Рис. 1.

A — обтекаемое тело; $K(\bar{r})$ — конус с вершиной в точке (x, y, z) , под которым видно тело A ; L — теневая область тела, ограниченная поверхностью $C(\bar{r})$.

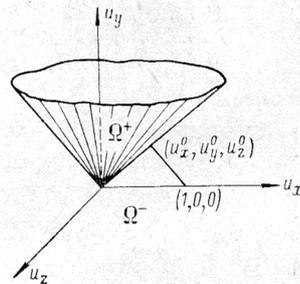


Рис. 2.

Ω^+ — конус в пространстве скоростей, содержащих все скорости \bar{u} , с которыми молекулы могут прийти к тела A в точку (x, y, z) без столкновений; Ω^- — оставшаяся часть пространства скоростей.

Функцию распределения $f(\bar{r}, \bar{u})$ для точек вне L можно представить в виде (1,10), так как предельное решение мало отличается от максвелловской функции распределения. Полиномы ψ_m^{\pm} из (1,10) будут определены по (1,8), если мы сумеем вычислить интегралы α_{ij}^{\pm} , но это зависит от формы обтекаемого тела и тем самым от областей Ω^{\pm} в пространстве скоростей (рис. 2).

При специальном виде Ω^{\pm} эти интегралы вычисляются точно, например, в случае полного, половины и четверти пространства скоростей. Но если Ω^{\pm} сложным образом зависят от \bar{r} , то приходится проводить численное интегрирование.

В случае гиперзвуковых задач ввиду δ -образности максвелловской функции распределения f_0 можно провести асимптотические исследования интегралов α_{ij}^\pm по параметру M . Если переходить к безразмерным величинам, то f_0 примет вид

$$f_0(\bar{u}, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} e^{-h(\bar{u}-\bar{U}_0)^2}, \tag{2,1}$$

где

$$h = \frac{5}{6} M^2, \quad \bar{U}_0 = \{1, 0, 0\}. \tag{2,2}$$

Таким образом, α_{ij}^\pm ввиду (1,11) можно переписать в виде

$$\alpha_{ij}^\pm(\bar{r}, h) = \iiint_{\Omega^\pm} f_0 \varphi_i \varphi_j d\bar{u} \equiv \iiint_{\Omega^\pm} F_{ij} f_0 d\bar{u} \tag{2,3}$$

или

$$\alpha_{ij}^\pm(\bar{r}, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \iiint_{\Omega^\pm} F_{ij} e^{-h(\bar{u}-\bar{U}_0)^2} d\bar{u}. \tag{2,4}$$

Эти интегралы можно исследовать асимптотически при $h \rightarrow \infty$. Функции F_{ij} являются степенными функциями относительно компонент скорости молекул \bar{u} . Из (2,4) видно, что точкой максимума подинтегральной функции является точка (1, 0, 0) в пространстве скоростей. Для области Ω^- на рис. 2 эта точка является внутренней, а для области Ω^+ внешней. Поэтому асимптотическое поведение α_{ij}^\pm по h будет экспоненциальным, а асимптотическое поведение α_{ij}^+ степенным.

Чтобы получить α_{ij}^+ , нужно исследовать асимптотическое поведение интегралов в окрестности точки (u_x^0, u_y^0, u_z^0) , которая находится на кратчайшем расстоянии от точки (1, 0, 0) до области Ω^+ и тем самым является граничной точкой для области. Если поверхность конуса Ω^+ содержит точку (1, 0, 0), что имеет место для точек, расположенных на $C(\bar{r})$ в физическом пространстве, то асимптотическое поведение α_{ij}^+ будет степенным. Отсюда видно, что имеет место неравномерность асимптотики α_{ij}^+ вблизи поверхности $C(\bar{r})$.

Из сказанного следует, что при асимптотическом исследовании α_{ij}^+ можно различать два случая:

- 1) когда точка максимума подинтегральной функции является внутренней точкой для области интегрирования;
- 2) когда точка максимума является граничной точкой.

Асимптотические исследования многократных интегралов как в случае 1), так и в случае 2) для различных типов граничных точек проводились в основном в работах Л. С. Hsu [7] — [9]. Если в гиперзвуковых задачах имеется симметрия, скажем по u_z , то интегралы α_{ij}^+ по u_z вычисляются точно и остаются двойные интегралы по u_x и u_y . Обширное асимптотическое исследование двойных интегралов проводилось в работе J. Focke [10]. У него рассматриваются также разного рода граничные точки.

Интерес при вычислении α_{ij}^\pm представляет и работа Тихонова и Самарского [11], которые рассматривают асимптотическое разложение интегралов от пикообразных функций.

Окончательно можно сказать, что для асимптотического исследования α_{ij}^{\pm} при $h \rightarrow \infty$ в математической литературе имеется большое количество работ разных авторов, которыми можно воспользоваться. Тем самым принципиальных трудностей при определении α_{ij}^{\pm} в гиперзвуковых задачах не возникает, и можно получить асимптотические выражения для полиномов ψ_m^{\pm} .

§ 3. Асимптотические выражения для α_{ij}^{\pm} в случае гиперзвукового продольного обтекания полубесконечной пластинки

Рассматривается гиперзвуковое продольное обтекание пластинки $y=0$, $x \geq 0$ одноатомным разреженным газом, средняя (безразмерная) скорость которого равна $\bar{U}_0 = \{1, 0, 0\}$ (рис. 3).

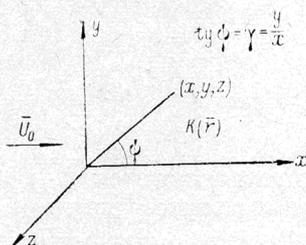


Рис. 3.

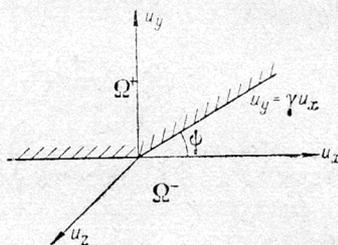


Рис. 4.

В данном случае пространство скоростей распадается на две части: Ω^+ и Ω^- (рис. 4). Функцию распределения $f(\bar{r}, \bar{u}, h)$ в этих областях можно представить в виде (1,10). Как было уже сказано в предыдущих параграфах, для построения полиномов ψ_m^{\pm} из (1,10) нужно вычислить α_{ij}^{\pm} по (1,11). Мы теперь и займемся вычислением этих интегралов для рассматриваемой задачи, причем найдем лишь те α_{ij}^{\pm} , для которых $i \geq j$ и $i, j = 0, 1, \dots, 7$. Это дает возможность получить асимптотические выражения для ψ_m^{\pm} при $m = 0, 1, \dots, 7$. При помощи этих полиномов можно вычислить основные макропараметры газа (кроме вектора теплового потока). Выписывая α_{ij}^{\pm} по (1,11) и (1,6), видим, что некоторые из α_{ij}^{\pm} совпадают, а именно:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{\pm} &= \alpha_{40}^{\pm}, & \alpha_{22}^{\pm} &= \alpha_{50}^{\pm}, & \alpha_{33}^{\pm} &= \alpha_{60}^{\pm}, & \alpha_{72}^{\pm} &= \alpha_{51}^{\pm}, \\ \alpha_{21}^{\pm} &= \alpha_{70}^{\pm}, & \alpha_{42}^{\pm} &= \alpha_{71}^{\pm}, & \alpha_{77}^{\pm} &= \alpha_{54}^{\pm}. \end{aligned} \quad (3,1)$$

При вычислении α_{ij}^{\pm} интегралы по u_z вычисляются точно, остается интегрирование по u_x и u_y .

Ввиду нечетности подынтегральной функции по u_z имеем

$$\alpha_{30}^{\pm} = \alpha_{32}^{\pm} = \alpha_{43}^{\pm} = \alpha_{53}^{\pm} = \alpha_{63}^{\pm} = \alpha_{73}^{\pm} = 0. \quad (3,2)$$

Далее, вычисляя интегралы по u_z , получим соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_{60}^{\pm} &= \frac{\alpha_{00}^{\pm}}{2h}; & \alpha_{61}^{\pm} &= \frac{\alpha_{10}^{\pm}}{2h}; & \alpha_{62}^{\pm} &= \frac{\alpha_{20}^{\pm}}{2h}; & \alpha_{64}^{\pm} &= \frac{\alpha_{40}^{\pm}}{2h}; \\ \alpha_{65}^{\pm} &= \frac{\alpha_{50}^{\pm}}{2h}; & \alpha_{66}^{\pm} &= \frac{3}{4h^2} \alpha_{00}^{\pm}; & \alpha_{76}^{\pm} &= \frac{\alpha_{70}^{\pm}}{2h}. \end{aligned} \quad (3,3)$$

Из соотношений (3,1) — (3,3) видно, что определению подлежат следующие α_{ij}^{\pm} :

$$\begin{aligned} &\alpha_{00}^{\pm}, \alpha_{10}^{\pm}, \alpha_{20}^{\pm}, \alpha_{40}^{\pm}, \alpha_{50}^{\pm}, \alpha_{70}^{\pm}, \alpha_{41}^{\pm}, \alpha_{51}^{\pm}, \\ &\alpha_{71}^{\pm}, \alpha_{52}^{\pm}, \alpha_{44}^{\pm}, \alpha_{54}^{\pm}, \alpha_{74}^{\pm}, \alpha_{55}^{\pm}, \alpha_{75}^{\pm}. \end{aligned} \quad (3,4)$$

Найдем сначала асимптотические формулы для α_{ij}^{-} из (3,4). По (1,11) и (2,1) имеем

$$\alpha_{ij}^{-} = \iiint_{\Omega^{-}} f_0 \varphi_i \varphi_j d\bar{u} = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{3/2} \iiint_{\Omega^{-}} \varphi_i \varphi_j e^{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2} d\bar{u}. \quad (3,5)$$

После интегрирования по u_z получим

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{-} = \frac{h}{\pi} &\left\{ \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i \varphi_j e^{-h[(u_x - 1)^2 + u_y^2]} du_x du_y + \right. \\ &\left. + \int_0^{\gamma u_x} \int_0^{\infty} \varphi_i \varphi_j e^{-h[(u_x - 1)^2 + u_y^2]} du_x du_y \right\}. \end{aligned} \quad (3,6)$$

Эти интегралы можно оценить по обычному методу Лапласа [12] при $h \rightarrow \infty$. После оценки получим

$$\begin{aligned} \alpha_{00}^{-} &\approx \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} \sqrt{h} \gamma), \quad \alpha_{10}^{-} \approx \alpha_{00}^{-}, \\ \alpha_{20}^{-} &\approx -\frac{e^{-h\gamma^2}}{2\sqrt{\pi h}}, \quad \alpha_{40}^{-} \approx \alpha_{00}^{-} \left(1 + \frac{1}{2h}\right), \\ \alpha_{50}^{-} &\approx \gamma \alpha_{20}^{-} + \frac{\alpha_{00}^{-}}{2h}, \quad \alpha_{70}^{-} \approx \alpha_{20}^{-}, \\ \alpha_{41}^{-} &\approx \alpha_{00}^{-} \left(1 + \frac{3}{2h}\right), \quad \alpha_{51}^{-} \approx \alpha_{50}^{-}, \\ \alpha_{71}^{-} &\approx \alpha_{20}^{-} \left(1 + \frac{1}{2h}\right), \quad \alpha_{52}^{-} \approx \alpha_{20}^{-} \left(\gamma^2 + \frac{1}{h}\right), \\ \alpha_{44}^{-} &\approx \alpha_{00}^{-} \left[1 + \frac{3}{2h} \left(2 + \frac{1}{2h}\right)\right], \quad \alpha_{54}^{-} \approx \alpha_{50}^{-} \left(1 + \frac{1}{2h}\right), \\ \alpha_{74}^{-} &\approx \alpha_{20}^{-} \left(1 + \frac{3}{2h}\right), \quad \alpha_{55}^{-} \approx \gamma^3 \alpha_{20}^{-} + \frac{3}{2h} \alpha_{50}^{-}, \quad \alpha_{75}^{-} \approx \alpha_{52}^{-}. \end{aligned} \quad (3,7)$$

Из (3,7) видно, что все α_{ij}^{-} ($i, j = 0, 1, \dots, 7$) могут быть выражены через α_{00}^{-} и α_{20}^{-} . Выписанные формулы для α_{ij}^{-} верны для $\gamma \geq 0$.

Займемся теперь вычислением α_{ij}^{+} из (3,4) при $h \rightarrow \infty$. По (1,11) и после интегрирования по u_z имеем

$$\alpha_{ij}^{+} = \frac{h}{\pi} \int_0^{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} F_{ij}(u_x, u_y) e^{-h[(u_x - 1)^2 + u_y^2]} du_x du_y, \quad (3,8)$$

где $F_{ij} = \varphi_i \varphi_j$.

Из (3,8) видно, что точка максимума подинтегральной функции лежит в точке (1,0). Но эта точка лежит вне области интегрирования $\bar{\Omega}^{+}$ (рис. 5). Так что основной вклад в значение интеграла (3,8) дает окрестность точки (u_x^0, u_y^0) , которая расположена на кратчайшем расстоянии от точки (1,0) до области $\bar{\Omega}^{+}$. Точка (u_x^0, u_y^0) является гранич-

ной точкой для области $\bar{\Omega}^+$. Вычислим интегралы (3,8) следующим образом. Перенесем начало координат в точку (1,0) и произведем поворот осей на угол ψ , где $\operatorname{tg} \psi = \gamma$, т. е. сделаем замену переменных интегрирования u_x, u_y на ξ, η по формулам

$$\begin{aligned} u_x &= 1 + \xi \cos \psi - \eta \sin \psi, \\ u_y &= \xi \sin \psi + \eta \cos \psi. \end{aligned} \quad (3,9)$$

Тогда имеем

$$\alpha_{ij}^+ = \frac{h}{\pi} \iint_H F_{ij}(\xi, \eta) e^{-h(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta (1 - \tilde{R}), \quad (3,10)$$

где

$$\tilde{R} = \frac{\iint_R F_{ij} e^{-h(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta}{\iint_H F_{ij} e^{-h(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta}. \quad (3,11)$$

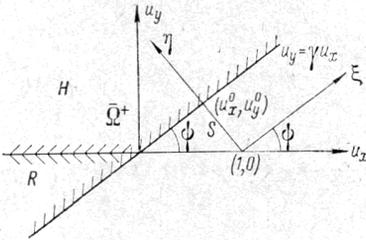


Рис. 5.

Если мы покажем, что $\tilde{R} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$, то α_{ij}^+ можно представить в виде

$$\alpha_{ij}^+ \approx \frac{h}{\pi} \int_s^\infty \int_{-\infty}^\infty F_{ij}(\xi, \eta) e^{-h(\xi^2 + \eta^2)} d\xi d\eta, \quad (3,12)$$

причем $s = \sin \psi = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}$ (см. рис. 5). Покажем, что $\tilde{R} \rightarrow 0$, когда $h \rightarrow \infty$ при вычислении α_{20}^+ . Вычисляя α_{20}^+ по (3,12), получим

$$\alpha_{20}^+ \approx \frac{\cos \psi}{2\sqrt{\pi h}} e^{-hs^2}. \quad (3,13)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{h}{\pi} \iint_R u_y e^{-h[(u_x - 1)^2 + u_y^2]} du_x du_y &\leq \frac{h}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 u_y e^{-h[(u_x - 1)^2 + u_y^2]} du_x du_y = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi h}} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{h}) \approx \frac{e^{-h}}{4\pi h}. \end{aligned} \quad (3,14)$$

Так что

$$\tilde{R} \leq \frac{e^{-h} \frac{1}{1 + \gamma^2}}{2\sqrt{\pi h} \cos \psi}.$$

Отсюда видно, что $\tilde{R} \rightarrow 0$, когда $h \rightarrow \infty$ при $0 \leq \gamma < \infty$. Аналогично можно показать, что $\lim_{h \rightarrow \infty} \tilde{R} = 0$ при вычислении других α_{ij}^+ . Подставляя F_{ij} из (1,6) в (3,12) и вычисляя интегралы, получим выражения для α_{ij}^+ из (3,4). Выпишем эти формулы

$$\alpha_{00}^+ \approx \frac{1}{2} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{h} s), \quad s = \sin \psi,$$

$$\alpha_{ij}^+ \approx \alpha_{00}^+ - \alpha_0^+ s, \quad \alpha_0^+ = \frac{e^{-hs^2}}{2\sqrt{\pi h}},$$

$$\alpha_{20}^+ \approx \alpha_0^+ \cos \psi, \quad \alpha_{40}^+ \approx \alpha_{10}^+ - s \alpha_{20}^+ \cos \psi + \frac{\alpha_{00}^+}{2h},$$

$$\alpha_{50}^+ \approx s \alpha_{20}^+ \cos \psi + \frac{\alpha_{00}^+}{2h}, \quad \alpha_{70}^+ \approx \alpha_{20}^+ \cos^2 \psi,$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{41}^+ &\approx \alpha_{00}^+ \left(1 + \frac{3}{2h} \right) - s\alpha_0^+ \left[s^4 + 3 \cos^2 \psi + \frac{1}{2h} (2 + \cos^2 \psi) \right], \\
 \alpha_{51}^+ &\approx s\alpha_{20}^+ \cos^3 \psi + \frac{1}{2h} (\alpha_{10}^+ + s\alpha_{20}^+ \cos \psi), \\
 \alpha_{71}^+ &\approx \alpha_{70}^+ \left(\cos^2 \psi + \frac{1}{2h} \right), \quad \alpha_{52}^+ \approx \alpha_{20}^+ \left[s^2 \cos^2 \psi + \frac{1}{2h} (2 + s^2) \right], \\
 \alpha_{44}^+ &\approx \alpha_{00}^+ \left(1 + \frac{3}{h} + \frac{3}{4h^2} \right) + s\alpha_0^+ \left[-4 + s^2 (6 + s^4 - 4s^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2h} (3s^4 - 8s^2 + 6s^2 \cos^2 \psi - 12 \cos^2 \psi) \right], \\
 \alpha_{54}^+ &\approx \alpha_{50}^+ + \frac{\alpha_{00}^+}{4h^2} + s\alpha_0^+ [s^2 \cos^2 \psi (-2 + 5s^2) + \\
 &\quad + \frac{1}{2h} [2s (3 \cos^2 \psi - 1) - \cos^2 \psi (4 + 3s^2)]], \\
 \alpha_{74}^+ &\approx \alpha_{20}^+ \left[1 - s^2 (3 \cos^2 \psi + s^4) + \frac{3}{2h} \cos^4 \psi \right], \\
 \alpha_{55}^+ &\approx s\alpha_{20}^+ \cos \psi \left[s^2 \cos^2 \psi + \frac{3}{2h} (1 + s^2) \right] + \frac{3}{4h^2} \alpha_{00}^+, \\
 \alpha_{75}^+ &\approx \alpha_{52}^+ - s^4 \alpha_{20}^+ \left(\cos^2 \psi + \frac{3}{2h} \right).
 \end{aligned} \tag{3,15}$$

Эти формулы верны для $0 \leq \gamma < \infty$. Из (3,15) видно, что все α_{ij}^+ при $i, j=0, 1, \dots, 7$ могут быть выражены через α_{00}^+ и α_0^+ и что слагаемые в формулах для α_{ij}^+ играют не одинаковую роль. Так, например, первое слагаемое в формуле для α_{50}^+ является главным при $\sqrt{h}s \rightarrow \infty$, а второе слагаемое становится главным, когда $\sqrt{h}s \rightarrow 0$. Этот факт говорит о том, что имеем дело с неравномерным асимптотическим поведением α_{ij}^+ вблизи пластинки, как уже было отмечено в § 2.

Когда $\gamma=0$, или $u=0$, то формулы (3,15) совпадают с выражениями для α_{ij}^+ , которые получаются из (3,8) при $\gamma=0$.

§ 4. Выражения макропараметров газа через коэффициенты a_m^\pm

Найдем теперь формулы для макропараметров газа, которые выражаются через коэффициенты a_m^\pm разложения функции распределения $f(\bar{r}, \bar{u})$ по полиномам, ортогональным в произвольных областях Ω^\pm в пространстве скоростей. Перепишем (1,12) в следующем виде:

$$\psi_m^\pm = \sigma_m^\pm \varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^\pm \varphi_k, \quad m=0, 1, 2, \dots, \tag{4,1}$$

где

$$\sigma_m^\pm = \frac{1}{\|\theta_m\|^\pm}, \quad \delta_{mk}^\pm = \delta_m^\pm b_{mk}^\pm, \tag{4,2}$$

причем b_{mk}^\pm и $\|\theta_m\|^\pm$ вычисляются по (1,15) и (1,16). Подставляя в (1,1) разложение (1,10), умножая соответственно на ψ_m^\pm и ψ_m^- и произведя интегрирование по Ω^+ и Ω^- , придем ввиду ортонормированности полиномов ψ_m^\pm к бесконечной системе интегральных моментных уравнений

$$a_m^\pm(\bar{r}) = \iint_{\Omega^\pm} \psi_m^\pm(\bar{r}, \bar{u}) V^\pm f^\pm d\bar{u}, \quad m=0, 1, \dots \tag{4,3}$$

Здесь через $V^\pm f^\pm$ обозначены правые части в (1,1). Введем следующие обозначения:

$$M_i^\pm(\bar{r}) = \iiint_{\Omega^\pm} \varphi_i f^\pm d\bar{u}, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (4,4)$$

Умножая разложение (1,10) на (4,1) и интегрируя по Ω^+ и Ω^- , получим следующие соотношения:

$$M_m^\pm = \frac{1}{\sigma_m^\pm} \left[a_m^\pm + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{mk}^\pm M_k^\pm \right], \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (4,5)$$

Отсюда видно, что M_i^\pm последовательно можно выразить через a_m^\pm . Введем еще обозначение

$$\{B\}^\pm = B^+ + B^-, \quad (4,6)$$

где B может быть скаляром, вектором или тензором.

Основные макропараметры газа $n, \bar{U}, T, P, \bar{H}$, а именно плотность, макроскопическая скорость, температура газа, тензор напряжения, вектор теплового потока, вычисляются по следующим формулам [1]:

$$n = \iiint_{-\infty}^{\infty} f d\bar{u} = \{n\}^\pm, \quad (4,7)$$

где

$$n^+ = \iiint_{\Omega^+} f d\bar{u}, \quad n^- = \iiint_{\Omega^-} f d\bar{u},$$

и аналогично

$$n\bar{U} = \iiint_{-\infty}^{\infty} f \bar{u} d\bar{u} = \{n\bar{U}\}^\pm, \quad (4,8)$$

$$3nRT = \iiint_{-\infty}^{\infty} f (\bar{u} - \bar{U})^2 d\bar{u} = \{3nRT\}^\pm, \quad (4,9)$$

$$P_{ij} = m \iiint_{-\infty}^{\infty} f (u_i - U_i)(u_j - U_j) d\bar{u} = \{P_{ij}\}^\pm, \quad (4,10)$$

где $i, j=1, 2, 3$ соответствуют x, y, z ,

$$\bar{H} = \frac{m}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} f (\bar{u} - \bar{U})^2 (\bar{u} - \bar{U}) d\bar{u} = \{\bar{H}\}^\pm. \quad (4,11)$$

Принимая во внимание (1,7), (4,4) и (4,5), величины (4,7)–(4,11) можно выразить через M_i^\pm и тем самым через a_m^\pm , т. е.

$$n = \{M_0\}^\pm = \{a_0\}^\pm, \quad (4,12)$$

$$n\bar{U} = \{\bar{U}_1\}^\pm,$$

где

$$\{U_{1x}\}^\pm = \{M_1\}^\pm, \quad \{U_{1y}\}^\pm = \{M_2\}^\pm, \quad \{U_{1z}\}^\pm = \{M_3\}^\pm, \quad (4,13)$$

$$3nRT = \{M_4 + M_5 + M_6\}^\pm - nU^2, \quad (4,14)$$

$$P_{ij} = m [\{P_{ij}^{(1)}\}^\pm - nU_i U_j], \quad P_{ij} = P_{ji}, \quad (4,15)$$

где

$$\{P_{xx}^{(1)}\}^{\pm} = \{M_4\}^{\pm}, \quad \{P_{xy}^{(1)}\}^{\pm} = \{M_7\}^{\pm}, \quad \{P_{xz}^{(1)}\}^{\pm} = \{M_8\}^{\pm}, \quad (4,16)$$

$$\{P_{yy}^{(1)}\}^{\pm} = \{M_5\}^{\pm}, \quad \{P_{yz}^{(1)}\}^{\pm} = \{M_9\}^{\pm}, \quad \{P_{zz}^{(1)}\}^{\pm} = \{M_6\}^{\pm},$$

$$\bar{H} = \frac{m}{2} [\{\bar{H}_1\}^{\pm} - n\bar{U}(U^2 + 3RT)] - \bar{U} \cdot P, \quad (4,17)$$

причем

$$\{H_{1x}\}^{\pm} = \{M_{13} + M_{14} + M_{15}\}^{\pm},$$

$$\{H_{1y}\}^{\pm} = \{M_{10} + M_{11} + M_{12}\}^{\pm}, \quad (4,18)$$

$$\{H_{1z}\}^{\pm} = \{M_{16} + M_{17} + M_{18}\}^{\pm}.$$

Далее, выразим частоту ударов молекул о тело, импульс и энергию, передаваемые молекулами телу, через коэффициенты a_m^{\pm} . Для частоты ударов в точке \bar{r}_s имеем [1]

$$N(\bar{r}_s) = - \iiint_{u_n < 0} f(\bar{r}_s, \bar{u}) u_n d\bar{u}, \quad (4,19)$$

где

$$u_n = u_x \cos(\bar{n}, x) + u_y \cos(\bar{n}, y) + u_z \cos(\bar{n}, z). \quad (4,20)$$

Подставляя (4,20) в (4,19) и принимая во внимание (4,4) и (4,5), получим

$$N(\bar{r}_s) = -U_{1n}^-(\bar{r}_s), \quad (4,21)$$

где U_{1n}^- — нормальная составляющая вектора \bar{U}_1^- .

Импульс и энергия, передаваемые молекулами телу за единицу времени на единичной площадке поверхности, содержащей точку \bar{r}_s , вычисляются по следующим формулам [1]:

$$\bar{p}(\bar{r}_s) = \bar{p}^- - \bar{p}^+, \quad (4,22)$$

$$E(\bar{r}_s) = E^- - E^+,$$

где \bar{p}^- , E^- — импульс и энергия, приносимые молекулами к телу, и \bar{p}^+ , E^+ — значения этих величин, уносимые от тела отраженными молекулами. Последние вычисляются с помощью граничной функции рождений $\tilde{\Phi}(\bar{r}_s, \bar{u})$, которая, в свою очередь, зависит от схемы отражения. Рассмотрим здесь только вычисленные \bar{p}^- и E^- . Имеем [1]:

$$\bar{p}^-(\bar{r}_s) = -m \iiint_{u_n < 0} f(\bar{r}_s, \bar{u}) u_n \bar{u} d\bar{u}, \quad (4,23)$$

$$E^-(\bar{r}_s) = -\frac{m}{2} \iiint_{u_n < 0} f(\bar{r}_s, \bar{u}) u_n u^2 d\bar{u}. \quad (4,24)$$

Подставляя (4,20) в (4,23) и (4,24) и принимая во внимание (4,4) и (4,5), будем иметь

$$p_i^-(\bar{r}_s) = -m P_{in}^{(1)-}(\bar{r}_s), \quad i = x, y, z, \quad (4,25)$$

$$E^-(\bar{r}_s) = -\frac{m}{2} H_{1n}^-(\bar{r}_s), \quad (4,26)$$

где $P_{in}^{(1)-}$ — нормальная составляющая вектора $\bar{P}_i^{(1)-}$ с компонентами $P_{ix}^{(1)-}$, $P_{iy}^{(1)-}$, $P_{iz}^{(1)-}$, которые вычисляются по (4,16), и H_{1n}^- — нормальная составляющая вектора \bar{H}_1^- , компоненты которого вычисляются по (4,18).

В случае продольного обтекания полубесконечной пластинки, где $\cos(\hat{n}, x) = \cos(\hat{n}, z) = 0$ и $\cos(\hat{n}, y) = 1$, формулы (4,21), (4,25) и (4,26) упрощаются и получим

$$\begin{aligned} N(\bar{r}_s) &= -M_2^-(\bar{r}_s), \\ p_x^-(\bar{r}_s) &= -mM_4^-(\bar{r}_s), \quad p_y^-(\bar{r}_s) = -mM_5^-(\bar{r}_s), \quad p_z^-(\bar{r}_s) = 0, \\ E^-(\bar{r}_s) &= -\frac{m}{2}H_{1y}^-(\bar{r}_s). \end{aligned} \quad (4,27)$$

Из формул (4,12)–(4,18), (4,21), (4,25) и (4,26) видно, что макропараметры газа будут вычислены, если будут известны a_m^\pm . Эти коэффициенты могут быть найдены из системы интегральных моментных уравнений (4,3).

При решении гиперзвуковых задач аэродинамики разреженных газов целесообразно сочетать следующие методы:

- 1) метод интегральных моментных уравнений;
- 2) метод итераций;
- 3) асимптотический метод.

При этом можно доводить решение задач до конца в аналитическом виде. Дело сводится к асимптотическому исследованию возникающих многократных интегралов.

Summary

The problem of the rarefied gas flow on the bodies of the arbitrary forms is discussed. Distribution function is presented by the polynomials orthogonal in the arbitrary regions of the velocity space. In hypersonic problems these polynomials may be constructed asymptotically. As an example the case of the hypersonic longitudinal flow on a semi-finite flat plate is considered. Macroparameters of the gas are written out by the expansion coefficients of the distribution function.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Аэродинамика разреженных газов», № 1, под ред. С. В. Валландера. Изд. ЛГУ, 1963.
2. Г. Грэд. О кинетической теории разреженных газов. Механика, № 4, № 5, 1952.
3. Сб. «Аэродинамика разреженных газов», № 2, под ред. С. В. Валландера. Изд. ЛГУ, 1964.
4. Э. Гросс, Э. Джексон, С. Зиринг. Граничные задачи в кинетической теории газов. Механика, № 5, 1958.
5. Сб. «Аэродинамика разреженных газов», № 3, под ред. С. В. Валландера. Изд. ЛГУ, 1965.
6. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. V, М., Гостехиздат, 1959.
7. L. C. Hsu. A theorem on the asymptotic behavior of a multiple integral. Duke math. j., 15, No 3, 1948.
8. L. C. Hsu. Approximations to a class of double integrals of functions of large numbers. Amer. j. math., 70, No 4, 1954.
9. L. C. Hsu. On a kind of asymptotic integrals with integrands having absolute maximum at boundary points. Acta math. Sinica, 4, No 3, 1954.
10. J. Focke. Asymptotische Entwicklungsmittels der Methode der stationären Phase. Berichte über die Verhandlungen der Sächs. Akad. der Wissensch. zu Leipzig. Math.-naturwiss. Kl., Bd. 101, H. 3. Berlin, Akademie-Verlag, 1954.
11. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Асимптотическое разложение интегралов от пикообразных функций. Научн. докл. высшей школы, физ.-матем. науки, № 1, 1959.
12. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1962.

Статья поступила в редакцию 29 декабря 1964 г.