

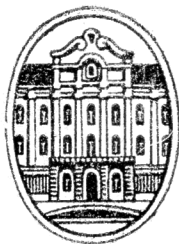
ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 19

СЕРИЯ

МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И АСТРОНОМИИ

Выпуск 4



ЛЕНИНГРАД
1964

МЕХАНИКА

Р. Г. Баранцев, Ю. Шлажа

К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
ПРИ БОЛЬШИХ M

Математическое изучение специфических свойств пограничного слоя в разреженном газе сопряжено с характерным явлением асимптотической неравномерности [1]. В настоящей заметке выявляется структура неравномерного асимптотического поведения макропараметров потока частиц, рожденных на стенке, при больших числах Маха.

1. Течение одноатомного газа вне пограничного слоя можно характеризовать (безразмерной) максвелловской функцией распределения

$$f_0 = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\{-h(\bar{u} - \bar{U}_0)^2\}, \quad (1)$$

где $\bar{u}$ — скорость молекул; $\bar{U}_0 = [1, 0, 0]$ — средняя скорость; $h = \frac{5}{6} M^2$.

При $h \rightarrow \infty$ $f_0 \rightarrow \delta(\bar{u} - \bar{U}_0)$, а поток частиц в направлении к стенке

$$N_0 = \iiint_{u_y < 0} |u_y| f_0 d\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \quad (2)$$

стремится к нулю. В пределе молекулы на стенку не падают, и при отсутствии эмиссии пограничный слой вырождается.

Когда h велико, возмущение распределения падающих частиц мало, и в 1-м приближении можно считать, что поток их на стенку дается выражением (2).

Допустим, что отражение от границы диффузное, а температура поверхности не отличается от температуры газа. Тогда функция распределения отраженных молекул на стенке имеет вид

$$f_s = \frac{1}{u_y} N_0 \tilde{T} = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-hu^2}, \quad (3)$$

где $\tilde{T} = \frac{2}{\pi} h^2 u_y \exp(-hu^2)$ — трансформанта диффузного отражения [1].

При удалении от стенки число этих молекул убывает за счет столкновений. В 1-м приближении достаточно учесть столкновения лишь с частицами основного потока (1), в котором при этом можно положить $h = \infty$. Если за единицу длины взять величину, обратную произведению (постоянного) сечения столкновения на плотность невозмущенного потока, то для вероятности пробега на расстояние y от стенки со скоростью $\bar{u}$ получим выражение [1]

$$\Pi = \exp\left\{-\frac{y}{u_y} |\bar{u} - \bar{U}_0|\right\}. \quad (4)$$

Таким образом, при больших M функция распределения частиц, рожденных на стенке, приближенно имеет вид

$$f_s(\bar{u}, y, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-hu^2 - \frac{y}{u_y} |\bar{u} - \bar{U}_0|\right\}. \quad (5)$$

2. Исследуем асимптотическое поведение макропараметров потока (5) при $h \rightarrow \infty$, $y \geq 0$. Для плотности имеем:

$$n_s(y, h) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \iiint_{u_y > 0} \exp\left\{-hu^2 - \frac{y}{u_y} |\bar{u} - \bar{U}_0|\right\} d\bar{u}. \quad (6)$$

После тривиальной оценки интегралов по u_x и u_z остается

$$n_s(y, h) \approx \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{-hu_y^2 - \frac{y}{u_y} \sqrt{1+u_y^2}\right\} du_y. \quad (7)$$

Асимптотическое поведение этого интеграла при больших h , очевидно, неравномерно по параметру y в окрестности точки $y=0$. Структура этой неравномерности легко раскрывается, если сделать в (7) следующую замену:

$$t = u_y \sqrt{h}. \quad (8)$$

Тогда

$$n_s \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{-t^2 - \frac{\alpha}{t}\right\} dt, \quad (9)$$

где

$$\alpha = y \sqrt{h}. \quad (10)$$

Таким образом, n_s фактически зависит лишь от параметра α , который при больших h может принимать любые неотрицательные значения в зависимости от того, насколько близко к нулю y . При $M \gg 1/y$ и $M \ll 1/y$ можно воспользоваться асимптотическими разложениями интеграла (9) для больших и малых α , полученными в [2].

$$n_s \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left\{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} \left[1 + O\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)\right], & \alpha \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha \ln \alpha + O(\alpha), & \alpha \rightarrow 0. \end{cases} \quad (11)$$

Если же $y = O(M^{-1})$, то интеграл (9) приходится вычислять численно [3].

Аналогичная неравномерность асимптотики наблюдается и у других макропараметров. Для скоростей, например, имеем:

$$n_s U_{sy} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \int_0^\infty t \exp\left\{-t^2 - \frac{\alpha}{t}\right\} dt, \quad (12)$$

$$n_s U_{sy} \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3h}} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \exp\left\{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} \left[1 + O\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)\right], & \alpha \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \{1 - \sqrt{\pi} \alpha - \alpha^2 \ln \alpha + O(\alpha^2)\}, & \alpha \rightarrow 0; \end{cases} \quad (13)$$

$$n_s U_{sx} \approx \frac{\alpha}{2h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{t} \exp\left\{-t^2 - \frac{\alpha}{t}\right\} dt, \quad (14)$$

$$n_s U_{sx} \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}h} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \exp\left\{-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} \left[1 + O\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)\right], & \alpha \rightarrow \infty, \\ \frac{-1}{2\sqrt{\pi}h} \alpha \left\{\ln \alpha + \frac{3}{2}C + O(\alpha)\right\}, & \alpha \rightarrow 0; \end{cases} \quad (15)$$

C — постоянная Эйлера.

Под пограничным слоем подразумевается всегда бесконечно тонкий слой, исчезающий вместе с характеризующим его малым параметром. Порядок толщины этого слоя при асимптотическом подходе связывается с состоянием перехода от одной асимптотики (дальней) к другой (ближней). В нашем случае толщина пограничного слоя обратно пропорциональна M . Внутренняя структура слоя характеризуется интегралами типа (9), (12), весьма типичными для аэродинамики разреженных газов [3, 4].

Summary

An irregular asymptotic behaviour of macroparameters of the flow of the particles birthing on the plate, when the Mach number is large, is discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. „Аэродинамика разреженных газов“. Сб. 1, под. ред. С. В. Валландера. Изд. ЛГУ, 1963.
2. M. Abramowitz. Evaluation of the integral $\int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{x}{t}} dt$. J. of Math. and Phys., **32**, № 2/3, 188, 1953.
3. П. Веландер. Температурный скачок в разреженном газе. Приложение к книге М. Девиена „Течения и теплообмен разреженных газов“. М., ИЛ, 164—186, 1962.
4. Е. П. Гросс, Е. А. Джексон. Кинетические модели и линеаризованное уравнение Больцмана. „Механика“, сб. переводов, № 5, 65—81, 1960.

Статья поступила в редакцию 20 июня 1963 г.