J. Szlaža

Umströmung einer Kugel durch ein Zweiphasenmedium

In der chemischen Verfahrenstechnik spielen die Stoff- und Wärmeaustauschprozesse in Mehrphasensystemen eine wichtige Rolle. Um an die Lösung derartiger Probleme herangehen zu können, müssen in den meisten Fällen zunächst die Geschwindigkeitsverteilungen der entsprechenden Strömungen bekannt sein. Zum anderen vollziehen sich die genannten Prozesse häufig in unmittelbarer Umgebung von eingelagerten Teilchen, wie feste Partikel, Tröpfchen, Blasen usw. Das Problem der Umströmung eines kugelförmigen Teilchens durch ein Mehrphasenmedium ist deshalb von großer Bedeutung. Ausgehend von der Rachmatulinschen Modellvorstellung für Mehrphasenströmungen [1] wird in der vorliegenden Arbeit die [redacted] Lösung des hydrodynamischen Problems der Umströmung einer Kugel durch ein Zweiphasenmedium angegeben. Es werden Formeln für die Geschwindigkeiten und Drücke der Phasen und des Gemisches hergeleitet und eine Verallgemeinerung der Stokesschen Formel für die Widerstandskraft gefunden.

I. Aufgabenstellung

Eine Kugel mit dem Radius a werde durch ein zähes Zweiphasenmedium laminar umströmt, wobei die beiden Phasen im Unendlichen die nach Betrag und Richtung konstanten Geschwindigkeiten U_i besitzen. Wir setzen voraus, daß die wirklichen und reduzierten Dichten der beiden Phasen konstant sind, d.h. $\rho_i^* = \text{const}$ und $\rho_i = \text{const}$. Somit sind auch die Porositäten $\varkappa_i = \dfrac{\rho_i}{\rho_i^*} = \text{const}$. Der Wechselwirkungskoeffizient K sei ebenfalls konstant. Als

Reynoldssche Zahlen der beiden Phasen können hier offenbar

$$Re_i = \frac{a\,U_i}{\nu_i}$$

genommen werden. Sind die Re_i hinreichend klein, d.h. sind bei vorgegebenem Zweiphasenmedium die Geschwindigkeiten U_i hinreichend klein oder aber der Kugelradius sehr klein, so können in den Bewegungsgleichungen die Trägheitsglieder gestrichen werden. Streichen wir in den Rachmatulinschen Gleichungen die Trägheitsglieder und nehmen an, daß keine äußeren Kräfte vorhanden sind, so entsteht das Gleichungssystem:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{grad} p_i = \mu_i \Delta \vec{v}_i + \frac{K}{\varkappa_i} \sum_{j=1}^{2} (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \qquad i = 1,2$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{div} \vec{v}_i = 0 \,,$$

wobei μ_i , $\vec{v}_i$, p_i entsprechend die Zähigkeitskoeffizienten, Geschwindigkeiten und Drücke der einzelnen Phasen sind. Befindet sich der Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Kugel (Abb.1), so bestehen offenbar die Randbedingungen

$$\text{(3)} \qquad v_x^{(i)} = v_y^{(i)} = v_z^{(i)} = 0 \qquad \text{für} \quad r = a \,.$$

Ist die Strömung im Unendlichen parallel zur x-Achse gerichtet, so gelten außerdem die Bedingungen

$$\text{(4)} \qquad v_x^{(i)} = U_i \quad v_y^{(i)} = 0 \quad v_z^{(i)} = 0 \qquad \text{für} \quad r \longrightarrow \infty \,.$$

Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir die Gleichungen und Bedingungen (1)-(4) in sphärischen Koordinaten r , θ , φ .

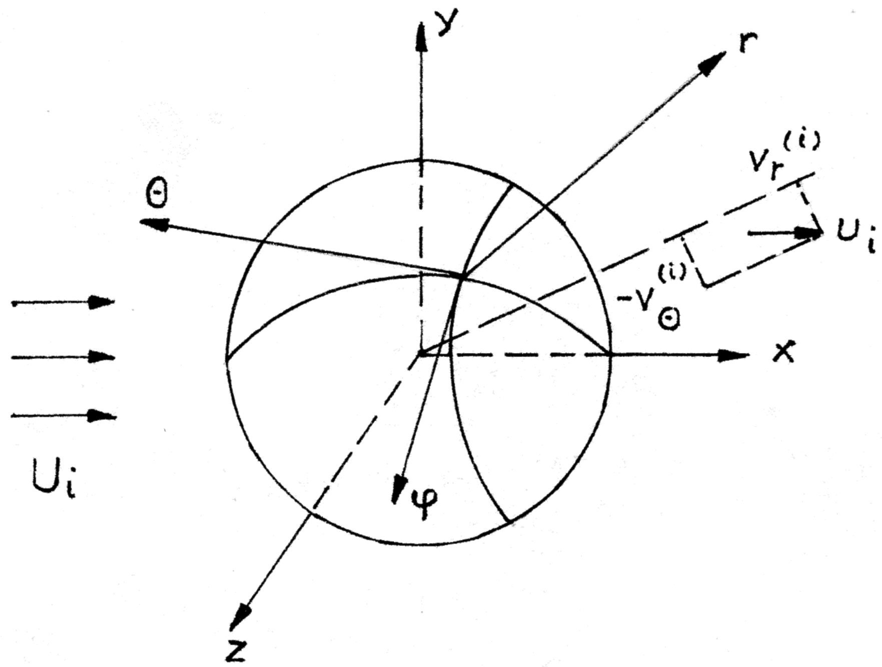

Abb. 1

Wegen der Symmetrie der Bewegung in bezug auf die x-Achse gilt

$$v_r^{(i)} = v_r^{(i)}(r,\Theta) \qquad v_\Theta^{(i)} = v_\Theta^{(i)}(r,\Theta) \qquad v_\varphi^{(i)} = 0 \qquad p_i = p_i(r,\Theta)\,,$$

und wir können die Gleichungen (1)-(2) in der Form

$$\frac{\partial p_i}{\partial r} = \mu_i\Big(\frac{\partial^2 v_r^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r^{(i)}}{\partial \Theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\Theta}{r^2}\frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial \Theta} -$$

$$- \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\Theta^{(i)}}{\partial \Theta} - \frac{2v_r^{(i)}}{r^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\Theta}{r^2} v_\Theta^{(i)}\Big) \quad \frac{K}{\varkappa_i}\sum_{j=1}^{2}\left(v_r^{(j)} - v_r^{(i)}\right)$$

(5)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_i}{\partial \Theta} = \mu_i\Big(\frac{\partial^2 v_\Theta^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\Theta^{(i)}}{\partial \Theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_\Theta^{(i)}}{\partial v} + \frac{\operatorname{ctg}\Theta}{r^2}\frac{\partial v_\Theta^{(i)}}{\partial \Theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial \Theta} -$$

$$- \frac{v_\Theta^{(i)}}{r^2\sin^2\Theta}\Big) + \frac{K}{\varkappa_i}\sum_{j=1}^{2}\left(v_\Theta^{(j)} - v_\Theta^{(i)}\right)$$

(6) $$\frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\Theta^{(i)}}{\partial \Theta} + \frac{2v_r^{(i)}}{r} + \frac{v_\Theta^{(i)}\operatorname{ctg}\Theta}{r} = 0$$

schreiben. Für die Bedingungen (3)-(4) erhalten wir

$$(7) \qquad v_r^{(i)} = 0 \qquad v_\Theta^{(i)} = 0 \qquad \text{für} \quad r = a$$

$$(8) \qquad v_r^{(i)} = U_i \cos\Theta \qquad v_\Theta^{(i)} = - U_i \sin\Theta \qquad \text{für} \quad r \longrightarrow \infty .$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die Geschwindigkeiten $v_r^{(i)}$, $v_\Theta^{(i)}$ und die Drücke p_i aus dem Gleichungssystem (1)-(2) zu ermitteln unter Berücksichtigung der Bedingungen (7)-(8).

II. Die Geschwindigkeiten der Phasen und des Gemisches

Das Gleichungssystem (1)-(2) läßt sich in der Gestalt

$$(9) \qquad \operatorname{grad} p_i + \mu_i \operatorname{rot} \vec{\Omega}_i = \frac{K}{\varkappa_i} \sum_{j=1}^{2} (\vec{v}_j - \vec{v}_i)$$

$$(10) \qquad \operatorname{div} \vec{v}_i = 0$$

schreiben, wobei

$$(11) \qquad \vec{\Omega}_i = \operatorname{rot} \vec{v}_i$$

ist. Wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung (9) die Operation rot anwenden, dann können wir p_i ausschalten und erhalten

$$(12) \qquad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Omega}_i = K_i \sum_{j=1}^{2} (\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i),$$

wobei $K_i = \dfrac{K}{\varkappa_i \mu_i}$ ist. Addieren und subtrahieren wir jeweils die beiden Gleichungen in (12), dann gelangen wir zu den Gleichungen

$$(13) \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \overline{\Psi_1} &= 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Psi}_2 + \gamma^2 \vec{\Psi}_2 &= 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\vec{\Psi}_1 = \frac{\vec{\Omega}_1}{K_1} + \frac{\vec{\Omega}_2}{K_2} \tag{14}$$

$$\vec{\Psi}_2 = \vec{\Omega}_2 - \vec{\Omega}_1 \tag{15}$$

$$\gamma = \sqrt{K_1 + K_2} \tag{16}$$

sind. Im Unterschied zu (12) sind die Gleichungen (13) nicht mehr miteinander gekoppelt. Da die Bewegung bezüglich der x-Achse symmetrisch ist, sind die Wirbellinien Kreise in den Ebenen rechtwinklig zur x-Achse. Demzufolge hat der Wirbelvektor $\vec{\Omega}_i$ nur die Komponente $\Omega_{i\varphi}$, die wir einfach mit Ω_i bezeichnen, die übrigen Komponenten sind Null. Infolge Symmetrie sind auch

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \varphi} = 0 \qquad \Omega_i = \Omega_i(r, \Theta) \quad . \tag{17}$$

Aus (14) und (15) erhalten wir dann

$$\Psi_1 = \frac{\Omega_1}{K_1} + \frac{\Omega_2}{K_2} \tag{18}$$

$$\Psi_2 = \Omega_2 - \Omega_1 \tag{19}$$

und gemäß (17) gilt

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial \varphi} = 0 \qquad \Psi_i = \Psi_i(r, \Theta) \quad . \tag{20}$$

Die Komponenten des Vektors rot $\vec{a}$ lassen sich in sphärischen Koordinaten wie folgt schreiben

$$\mathrm{rot}_r \vec{a} = \frac{1}{r \sin\Theta}\left[\frac{\partial(a_\varphi \sin\Theta)}{\partial\Theta} - \frac{\partial a_\Theta}{\partial\varphi}\right]$$

$$\text{(21)} \qquad \mathrm{rot}_\varphi \vec{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\, a_\Theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\Theta}\right]$$

$$\mathrm{rot}_\Theta \vec{a} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\, a_\varphi)}{\partial r}\right] \quad .$$

Unter Berücksichtigung dieser Formeln und der Beziehungen (18)-(20) lassen sich die Komponenten der Vektoren $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{\psi_i}$ ermitteln. Es sind

$$\mathrm{rot}_r(\mathrm{rot}\vec{\psi_i}) = 0 \qquad \mathrm{rot}_\Theta(\mathrm{rot}\vec{\psi_i}) = 0$$

$$\mathrm{rot}_\varphi(\mathrm{rot}\vec{\psi_i}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi_i)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\psi_i \sin\Theta)\right] .$$

Setzen wir die gewonnenen Ausdrücke in (13) ein, so gelangen wir zu den Gleichungen

$$\text{(22)} \qquad r\frac{\partial^2(r\psi_1)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial\Theta}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\psi_1 \sin\Theta)\right] = 0$$

$$\text{(23)} \qquad r\frac{\partial^2(r\psi_2)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial\Theta}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\psi_2 \sin\Theta)\right] = \gamma^2 r^2 \psi_2 \ .$$

Da in weiter Entfernung von der Kugel die Bewegung wirbelfrei ist, gilt $\Omega_i = 0$ für $r \to \infty$ und nach (18) und (19) ist

$$\text{(24)} \qquad \psi_i = 0 \qquad \text{für} \quad r \longrightarrow \infty \quad .$$

Wir bestimmen nun ψ_i aus (22) und (23) unter Berücksichtigung der Bedingung (24). Wir suchen die Lösung in der Form

$$\text{(25)} \qquad \psi_i = f_i(r)\ g_i(\Theta) \quad .$$

Setzen wir (25) in (22) und (23) ein, dann erhalten wir

$$\frac{r}{f_1}\frac{d^2(rf_1)}{dr^2} = -\frac{1}{g_1}\frac{d}{d\Theta}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{d}{d\Theta}(g_1\sin\Theta)\right]$$

$$\frac{r}{f_2}\frac{d^2(rf_2)}{dr^2} - \gamma^2 r^2 = -\frac{1}{g_2}\frac{d}{d\Theta}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{d}{d\Theta}(g_2\sin\Theta)\right] .$$

Da die Koordinaten r und Θ unabhängig voneinander sind, sind diese Gleichungen erfüllt, wenn die linken und rechten Seiten einer Konstanten gleich sind, nämlich

$$\frac{r}{f_1}\frac{d^2(rf_1)}{dr^2} = \varepsilon_1 \qquad \frac{1}{g_1}\frac{d}{d\Theta}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{d}{d\Theta}(g_1\sin\Theta)\right] = -\varepsilon_1 \tag{26}$$

$$\frac{r}{f_2}\frac{d^2(rf_2)}{dr^2} - \gamma^2 r^2 = \varepsilon_2 \qquad \frac{1}{g_2}\frac{d}{d\Theta}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{d}{d\Theta}(g_2\sin\Theta)\right] = -\varepsilon_2 . \tag{27}$$

Da die Konstanten ε_i beliebig sind, wählen wir sie so, daß die zweiten Gleichungen in (26) und (27) periodische Lösungen besitzen. Für $\varepsilon_1 = 2$ ergibt sich

$$g_1 = \sin\Theta . \tag{28}$$

Die erste Gleichung in (26) lautet dann

$$\frac{d^2(r\,f_1)}{dr^2} = \frac{2}{r}\,f_1 .$$

Suchen wir die partikulären Lösungen dieser Gleichung in der Form $f_1 = r^m$, dann erhalten wir die einzige Lösung, die für $r \to \infty$ verschwindet, in der Gestalt $f_1 = \frac{A}{r^2}$. Unter Berücksichtigung von (25) und (28) ist dann

$$(29) \qquad \psi_1 = \frac{A \sin\Theta}{r^2} \quad .$$

Die Konstante A muß im weiteren noch bestimmt werden.
Die erste Gleichung in (27) läßt sich wie folgt schreiben

$$r^2 f_2'' + 2r\, f_2' - [2 + \gamma^2 r^2]\, f_2 = 0 \quad .$$

Nach Kamke [2] hat diese Gleichung das allgemeine Integral

$$r^2 f_2 = C(\gamma r - 1)\, e^{\gamma r} + B(\gamma r + 1)\, e^{-\gamma r} \quad .$$

Die Konstante $C = 0$, da f_2 für $r \to \infty$ verschwinden soll.
Für ψ_2 ergibt sich nach (25) und (28) folgender Ausdruck

$$(30) \qquad \psi_2 = B(\gamma r + 1)\, \frac{e^{-\gamma r}}{r^2} \sin\Theta \quad .$$

Die Konstante B muß bei den weiteren Untersuchungen ebenfalls noch gefunden werden.
Nachdem wir ψ_i ermittelt haben, können wir zur Bestimmung von $v_r^{(i)}$ und $v_\Theta^{(i)}$ übergehen. Berücksichtigen wir (18), (19), (11) und die Formeln (21), so lassen sich die Gleichungen (29) und (30) wie folgt schreiben

$$(31) \qquad \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, u_\Theta^{(1)}) - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \Theta}\right] = \frac{A \sin\Theta}{r^2}$$

$$(32) \qquad \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, u_\Theta^{(2)}) - \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \Theta}\right] = B(\gamma r + 1)\, \frac{e^{-\gamma r}}{r^2} \sin\Theta \, ,$$

wobei

$$(33)\qquad \begin{aligned} u_{\tau}^{(1)} &= \frac{v_{\tau}^{(1)}}{K_1} + \frac{v_{\tau}^{(2)}}{K_2} \\ u_{\tau}^{(2)} &= v_{\tau}^{(2)} - v_{\tau}^{(1)} \end{aligned} \qquad \tau = r\,,\ \Theta$$

sind. Die Kontinuitätsgleichung hat nach (6) die Gestalt

$$(34)\qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\, u_r^{(i)})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial(u_{\Theta}^{(i)}\sin\Theta)}{\partial\Theta} = 0 \quad .$$

Wegen (33), (7) und (8) haben wir für die $u_{\tau}^{(i)}$ folgende Randbedingungen

$$u_r^{(i)} = 0 \qquad u_{\Theta}^{(i)} = 0 \qquad \text{für} \quad r = a$$

$$(35)\qquad \left.\begin{aligned} u_r^{(1)} &= U^{*}\cos\Theta & u_r^{(2)} &= \bar{U}\cos\Theta \\ u_{\Theta}^{(1)} &= -\,U^{*}\sin\Theta & u_{\Theta}^{(2)} &= -\,\bar{U}\sin\Theta \end{aligned}\right\}\ \text{für} \quad r \to \infty \quad .$$

Hier sind

$$(36)\qquad U^{*} = \frac{U_1}{K_1} + \frac{U_2}{K_2} \qquad \bar{U} = U_2 - U_1 \quad .$$

Wir lösen nun das Gleichungssystem (31), (32), (34) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (35) und erhalten somit Formeln für die $u_{\tau}^{(i)}$. Mit Hilfe der gewonnenen Ausdrücke für $u_{\tau}^{(i)}$ lösen wir dann das algebraische Gleichungssystem (33) und gelangen zu den gesuchten Größen für die Geschwindigkeiten $v_r^{(i)}$ und $v_{\Theta}^{(i)}$.

Wie leicht zu sehen ist, sind die Gleichungen (31) und (32) nicht miteinander gekoppelt. Demnach läßt sich das genannte Problem in zwei Aufgaben aufspalten. Wir befassen uns zunächst mit der ersten Aufgabe.

1.) Gesucht werden die $u_{\tau}^{(1)}$ aus den Gleichungen

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, u_{\Theta}^{(1)}\right) - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \Theta}\right] = \frac{A \sin\Theta}{r^2}$$

(37)

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\left(r^2\, u_r^{(1)}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\Theta}\,\frac{\partial\left(u_{\Theta}^{(1)} \sin\Theta\right)}{\partial \Theta} = 0 \quad .$$

unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$u_r^{(1)} = 0 \qquad u_{\Theta}^{(1)} = 0 \qquad \text{für} \quad r = a$$

(38)

$$u_r^{(1)} = U^{*} \cos\Theta \qquad u_{\Theta}^{(1)} = - U^{*} \sin\Theta \qquad \text{für} \quad r \to \infty \quad .$$

Wir suchen die Lösung in der Form

$$u_r^{(1)} = \left\{ U^{*} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{r^k} \right\} \cos\Theta$$

(39)

$$u_{\Theta}^{(1)} = \left\{ -U^{*} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{r^k} \right\} \sin\Theta \quad .$$

Indem wir (39) in (37) einsetzen und die Koeffizienten bei gleichen trigonometrischen Funktionen gleichsetzen, gelangen wir zu den Beziehungen

$$\sum_{k=1}^{n} \left[a_k + (1-k)\, b_k\right] r^{1-k} = A$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(2-k)\, a_k + 2 b_k\right] r^{1-k} = 0 \quad .$$

Der Koeffizientenvergleich bei gleichen Potenzen von r ergibt für $k = 1$

(40) $$a_1 = A \qquad b_1 = -\frac{A}{2}$$

und für $k > 1$

$$a_k + (1-k)\, b_k = 0$$

$$(2-K)\, a_k + 2\, b_k = 0 \quad .$$

Dieses homogene Gleichungssystem besitzt nur dann Lösungen, die verschieden von Null sind, wenn die Determinante des Systems gleich Null ist, oder

$$2 + (k-1)(2-k) = 0 \quad .$$

Da $k > 1$ ist, folgt hieraus, daß $k = 3$ und

(41) $$a_3 = 2\, b_3$$

sind. Alle weiteren a_k und b_k sind identisch gleich Null. Setzen wir (40) und (41) in (39) ein und bestimmen danach mit Hilfe der Randbedingungen (38) die Konstanten A und a_3, so erhalten wir

$$A = -\frac{3}{2}\, a\, U^* \qquad a_3 = \frac{a^3}{2}\, U^*$$

und für $u_r^{(1)}$ und $u_\Theta^{(1)}$ schließlich die Formeln

(42) $$u_r^{(1)} = U^* \left\{ 1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right\} \cos\Theta$$

$$u_\Theta^{(1)} = U^* \left\{ 1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right\} \sin\Theta \quad .$$

Wir lösen jetzt die zweite Aufgabe.

2.) Gesucht werden $u_r^{(2)}$ und $u_\Theta^{(2)}$ aus den Gleichungen

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u_\Theta^{(2)}\right) - \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \Theta}\right] = B(\gamma r+1)\,\frac{e^{-\gamma r}}{r^2}\,\sin\Theta$$

(43)

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\left(r^2\,u_r^{(2)}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\Theta}\,\frac{\partial\left(u_\Theta^{(2)}\,\sin\Theta\right)}{\partial\Theta} = 0$$

unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$u_r^{(2)} = 0 \qquad u_\Theta^{(2)} = 0 \qquad \text{für} \quad r = a$$

(44)

$$u_r^{(2)} = \bar{U}\cos \qquad u_\Theta^{(2)} = -\,\bar{U}\sin\Theta \qquad \text{für} \quad r \longrightarrow \infty \quad .$$

Wir suchen die Lösung in der Form

$$u_r^{(2)} = \left\{\bar{U} + f(r)\right\}\cos\Theta$$

(45)

$$u_\Theta^{(2)} = \left\{-\,\bar{U} + g(r)\right\}\sin\Theta \quad .$$

Setzen wir (45) in (43) ein, dann erhalten wir ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung von $f(r)$ und $g(r)$, nämlich

$$(r^2 f)' + 2r\,g = 0$$

(46)

$$r^2 (rg)' + r^2 f = Br(\gamma r + 1)\,e^{-\gamma r} \quad .$$

Damit (44) erfüllt ist, gelten für $f(r)$ und $g(r)$ die Randbedingungen

$$f(a) = -\overline{U} \qquad g(a) = \overline{U}$$
(47)
$$f(\infty) = g(\infty) = 0 \quad .$$

Setzen wir in (46)

(48) $$r^2 f = F(r) \qquad rg = G(r) \ ,$$

dann gelangen wir zu dem System

$$F' + 2G = 0$$
(49)
$$r^2 G' + F = H(r) \ ,$$

wobei

(50) $$H(r) = Br(\gamma r + 1)\, e^{-\gamma r}$$

ist. Eliminieren wir G aus der ersten Gleichung in (49) und setzen den gewonnenen Ausdruck in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$r^2 F'' - 2F = -2H(r) \quad .$$

Wir integrieren diese Gleichung und erhalten eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$r^2 F' - 2r\,F = -2\int H(r)\,dr + C_1 \ ,$$

die nach Integration unter Berücksichtigung von (50) zu dem Ausdruck

(51) $$F = r^2 \left\{ 2B\Phi(r) + C_2 \right\}$$

führt, wobei

$$\Phi(r) = \int \left[e^{-\gamma r}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{3}{r^3\gamma} + \frac{3}{r^4\gamma^2}\right) + \frac{C_1}{r^4}\right] dr =$$

$$= -\left\{ \frac{C_1}{3r^3} + e^{-\gamma r}\left[\frac{1}{\gamma r^2} + \frac{1}{\gamma^2 r^3}\right] \right\}$$

ist. Wegen (49) und (51) ergibt sich

$$(52) \qquad G = - r\left\{2B\Phi(r) + C_2\right\} - B\left\{e^{-\gamma r}\left[1 + \frac{3}{r\gamma} + \frac{3}{\gamma^2 r^2}\right] + \frac{C_1}{r^2}\right\} .$$

Setzen wir (51) und (52) in (48) ein, dann gelangen wir zu folgenden Ausdrücken für $f(r)$ und $g(r)$:

$$(53) \qquad \begin{aligned} f(r) &= - 2B\left\{\frac{C_1}{3r^3} + e^{-\gamma r}\left[\frac{1}{\gamma r^2} + \frac{1}{\gamma^2 r^3}\right]\right\} + C_2 \\ g(r) &= - B\left\{\frac{C_1}{3r^3} + e^{-\gamma r}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{\gamma r^2} + \frac{1}{\gamma^2 r^3}\right]\right\} - C_2 \end{aligned} .$$

Mit Hilfe der Bedingungen (47) lassen sich die Konstanten B , C_1 , C_2 ermitteln. Es sind

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= - a^3 e^{-\gamma a}\left\{\frac{1}{a} + \frac{3}{\gamma a^2} + \frac{3}{\gamma^2 a^3}\right\} \\ B &= - \frac{3a\bar{U}}{2} e^{\gamma a} \end{aligned} .$$

Setzen wir diese Konstanten in (53) und die gewonnenen Ausdrücke für $f(r)$ und $g(r)$ in (45) ein, dann erhalten wir schließlich Formeln für $u_r^{(2)}$ und $u_\Theta^{(2)}$, nämlich

$$(54) \qquad \begin{aligned} u_r^{(2)} &= \bar{U}\left\{1 - \frac{a^3}{r^3}\left(1 + \frac{3}{\gamma a} + \frac{3}{\gamma^2 a^2}\right) + 3\,\frac{a}{r}\,e^{-\gamma(r-a)}\left(\frac{1}{\gamma r} + \frac{1}{\gamma^2 r^2}\right)\right\}\cos\Theta \\ u_\Theta^{(2)} &= -\bar{U}\left\{1 + \frac{a^3}{2r^3}\left(1 + \frac{3}{\gamma a} + \frac{3}{\gamma^2 a^2}\right) - \frac{3}{2}\,\frac{a}{r}\,e^{-\gamma(r-a)}\left(1 + \frac{1}{\gamma r} + \frac{1}{\gamma^2 r^2}\right)\right\}\sin\Theta \end{aligned} .$$

Die Formeln (42) und (54) geben uns die Möglichkeit, die gesuchten Geschwindigkeiten $v_r^{(i)}$ und $v_\Theta^{(i)}$ nach (33) endgültig zu bestimmen. Durch Auflösung des algebraischen Gleichungssystems (33) gelangen wir zu folgenden Ausdrücken für $v_r^{(i)}$ und $v_\Theta^{(i)}$:

(55)
$$v_r^{(1)} = \frac{K_1}{K_1+K_2} \left(K_2\, u_r^{(1)} - u_r^{(2)}\right) \qquad v_\Theta^{(1)} = \frac{K_1}{K_1+K_2} \left(K_2\, u_\Theta^{(1)} - u_\Theta^{(2)}\right)$$
$$v_r^{(2)} = \frac{K_2}{K_1+K_2} \left(K_1\, u_r^{(1)} + u_r^{(2)}\right) \qquad v_\Theta^{(2)} = \frac{K_2}{K_1+K_2} \left(K_1\, u_\Theta^{(1)} + u_\Theta^{(2)}\right) .$$

Die Geschwindigkeiten des Zweiphasengemisches erhält man über die Relation
$$\vec{v} = \varkappa_1 \vec{v}_1 + \varkappa_2 \vec{v}_2 .$$

Demnach gilt wegen (55)

(56)
$$v_r = \frac{1}{K_1 + K_2} \left\{ K_1 K_2\, u_r^{(1)} + (\varkappa_2 K_2 - \varkappa_1 K_1)\, u_r^{(2)} \right\}$$
$$v = \frac{1}{K_1 + K_2} \left\{ K_1 K_2\, u_\Theta^{(1)} + (\varkappa_2 K_2 - \varkappa_1 K_1)\, u_\Theta^{(2)} \right\} .$$

Aus der Struktur der Formeln (42), (54), (55) und (56) ergibt sich die interessante Feststellung, daß sogar schon für die quasihomogene Umströmung $(U_1 = U_2)$ einer Kugel durch ein Zweiphasenmedium die Geschwindigkeiten $v_r = v_r^{(1)} = v_r^{(2)}$, $v_\Theta = v_\Theta^{(1)} = v_\Theta^{(2)}$ sind und mit den Geschwindigkeiten der entsprechenden homogenen Strömung [3] übereinstimmen. Mit anderen Worten, liegt eine quasihomogene Umströmung vor, dann kann man sofort auf die Formeln für die Geschwindigkeiten der homogenen Strömung zurückgreifen.

III. Die Verallgemeinerung der Stokesschen Formel für die Widerstandskraft

Wir befassen uns zunächst mit der Bestimmung der Drücke p_i der einzelnen Phasen. Wegen (9) gilt

$$\frac{1}{\mu_i} \operatorname{grad} p_i + \operatorname{rot} \vec{\Omega}_i = K_i \sum_{j=1}^{2} (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \quad . \tag{57}$$

Wenn wir in (57) die beiden Gleichungen jeweils addieren und subtrahieren, dann gelangen wir zu den Beziehungen

$$\operatorname{grad} P_1 = - \operatorname{rot} \vec{\psi}_1 \tag{58}$$

$$\operatorname{grad} P_2 = - \operatorname{rot} \vec{\psi}_2 - \gamma^2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad , \tag{59}$$

wobei

$$P_1 = \frac{p_1}{\mu_1 K_1} + \frac{p_2}{\mu_2 K_2}$$
$$(60)$$
$$P_2 = \frac{p_2}{\mu_2} - \frac{p_1}{\mu_1}$$

sind und $\vec{\psi}_i$, sich nach (16), (18) und (19) bestimmen lassen. Unter Berücksichtigung von (21) und (33) kann man die Gleichungen (58) und (59) wie folgt in sphärischen Koordinaten schreiben:

$$\frac{\partial P_1}{\partial r} = - \frac{1}{r \sin\Theta} \frac{(\psi_1 \sin\Theta)}{\partial\Theta}$$
$$(61)$$
$$\frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial\Theta} = \frac{1}{r} \frac{(r \psi_1)}{\partial r}$$

und

$$\frac{\partial P_2}{\partial r} = - \frac{1}{r \sin\Theta} \frac{\partial(\psi_2 \sin\Theta)}{\partial\Theta} - \gamma^2 u_r^{(2)}$$

(62)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P_2}{\partial\Theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi_2)}{\partial r} - \gamma^2 u_\Theta^{(2)} \quad .$$

Setzen wir nun in (61) und (62) die Werte für ψ_1, ψ_2, $u_r^{(2)}$ und $u_\Theta^{(2)}$ nach (29), (30) und (54) ein und integrieren die Gleichungen, so ergeben sich für P_1 und P_2 folgende Formeln:

$$P_1 = - \frac{3}{2} \frac{a\, U^*}{r^2} \cos\Theta$$

(63)

$$P_2 = - \gamma^2 \bar{U} r \left\{ 1 + \frac{a^3}{r^3} \left(1 + \frac{3}{\gamma a} + \frac{3}{\gamma^2 a^2}\right) \right\} \cos\Theta \quad .$$

Da wegen (60)

$$p_1 = \frac{K_1 \mu_1}{\gamma^2} (K_2 P_1 - P_2)$$

$$p_2 = \frac{K_2 \mu_2}{\gamma^2} (K_1 P_1 + P_2)$$

sind, erhalten wir bei Berücksichtigung von (63) für die Drücke p_i der einzelnen Phasen

$$p_1 = \frac{K_1 \mu_1}{2} \left\{ - \frac{3K_2}{2} \frac{aU^*}{r^2} + \gamma^2 \bar{U} r \left[1 + \frac{a^3}{2r^3}\left(1 + \frac{3}{\gamma a} + \frac{3}{\gamma^2 a^2}\right)\right] \right\} \cos\Theta$$

(64)

$$p_2 = \frac{K_2 \mu_2}{2} \left\{ - \frac{3K_1}{2} \frac{aU^*}{r^2} - \gamma^2 \bar{U} r \left[1 + \frac{a^3}{2r^3}\left(1 + \frac{3}{\gamma a} + \frac{3}{\gamma^2 a^2}\right)\right] \right\} \cos\Theta \quad .$$

Der Druck des gesamten Zweiphasengemisches wird nach der Formel

$$p = \varkappa_1 p_1 + \varkappa_2 p_2$$

ermittelt. Setzen wir hier die Werte für p_1 und p_2 aus (64) ein, so ergibt sich

$$p = -\frac{3}{2}\frac{a}{r^2}(\varkappa_1\mu_1 U_1 + \varkappa_2\mu_2 U_2)\cos\Theta \quad . \tag{65}$$

Aus (64) und (65) ist zu ersehen, daß für $\mu_1 = \mu_2$, $U_1 = U_2$ die Formeln für p_1, p_2, p mit der entsprechenden Formel für eine homogene Strömung [3] übereinstimmen. Wir berechnen noch die Kräfte, die von seiten der einzelnen Phasen der Strömung auf die Kugel ausgeübt werden. Hierzu sind die auf die Oberflächenelemente der Kugel wirkenden Spannungen zu berechnen:

$$\begin{aligned} \overset{(i)}{p}_{rr} &= -p_i + 2\mu_i \frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial r} \\ \overset{(i)}{p}_{r\Theta} &= \mu_i \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial \Theta} + \frac{\partial v_\Theta^{(i)}}{\partial r} - \frac{v_\Theta^{(i)}}{r}\right) \quad . \end{aligned} \tag{66}$$

Auf der Kugeloberfläche sind $\overset{(i)}{v}_r = \overset{(i)}{v}_\Theta = 0$ und damit auch $\frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial \Theta} = 0$, $\frac{\partial v_\Theta^{(i)}}{\partial \Theta} = 0$. Aus der Kontinuitätsgleichung (6) ergibt sich dann $\frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial r} = 0$ für $r = a$.

Die Formeln (66) vereinfachen sich und liefern

$$\begin{aligned} \overset{(i)}{p}_{rr} &= -p_i \\ \overset{(i)}{p}_{r\Theta} &= \mu_i \frac{\partial v^{(i)}}{\partial r} \quad . \end{aligned} \tag{67}$$

Unter Berücksichtigung von (64), (55), (42) und (54) erhalten wir aus (67) für die von den einzelnen Phasen auf die Kugeloberflächenelemente ausgeübten Druck- und Zähigkeitskräfte folgende Ausdrücke

(68)
$$p_{rr}^{(1)} = -\frac{K_1\mu_1}{\gamma^2}\left\{-\frac{3K_2U^*}{2a} + a\gamma^2\bar{U}\left[1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{\gamma a}+\frac{3}{\gamma^2a^2}\right)\right]\right\}\cos\Theta$$
$$p_{rr}^{(2)} = -\frac{K_2\mu_2}{\gamma^2}\left\{-\frac{3K_1U^*}{2a} - a\gamma^2\bar{U}\left[1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{\gamma a}+\frac{3}{\gamma^2a^2}\right)\right]\right\}\cos\Theta$$
$$p_{r\Theta}^{(1)} = \frac{K_1\mu_1}{\gamma^2}\left\{-\frac{3K_2U^*}{2a} + \frac{3}{2}\bar{U}\left(\gamma+\frac{1}{a}\right)\right\}\sin\Theta$$
$$p_{r\Theta}^{(2)} = \frac{K_2\mu_2}{\gamma^2}\left\{-\frac{3K_1U^*}{2a} - \frac{3}{2}\bar{U}\left(\gamma+\frac{1}{a}\right)\right\}\sin\Theta \quad .$$

Nach der Formel

$$p_{r\tau} = \varkappa_1\, p_{r\tau}^{(1)} + \varkappa_2\, p_{r\tau}^{(2)} \qquad \tau = r\,,\Theta$$

gelangen wir zu Beziehungen für die Druck und Zähigkeitskräfte, die vom Zweiphasengemisch auf die Oberflächenelemente der Kugel ausgeübt werden:

(69)
$$p_{rr} = -p = \frac{3}{2a}\left\{\varkappa_1\mu_1 U_1 + \varkappa_2\mu_2 U_2\right\}\cos\Theta$$
$$p_{r\Theta} = -\frac{3}{2a}\left(\varkappa_1\mu_1 U_1 + \varkappa_2\mu_2 U_2\right)\sin\Theta \quad .$$

Die Resultierende aller an die Kugeloberfläche angreifenden Kräfte der Phasen läßt sich nach der Formel

$$F_i = \iint_{(S)} \left(p_{rr}^{(i)}\cos\Theta - p_{r\Theta}^{(i)}\sin\Theta\right) ds$$

ermitteln. Unter Berücksichtigung von (68) erhalten wir somit für die Widerstandskräfte die Beziehungen

(70)
$$F_1 = 6\pi a\frac{K_1\mu_1}{\gamma^2}\left\{K_2\, U^* - \gamma^2\,\bar{U}\left(1+\frac{3}{\gamma}+\frac{3}{\gamma^2 a}\right)\right\}$$
$$F_2 = 6\pi a\frac{K_2\mu_2}{\gamma^2}\left\{K_1\, U^* + \gamma^2\,\bar{U}\left(1+\frac{3}{\gamma}+\frac{3}{\gamma^2 a}\right)\right\} \quad .$$

Der Gesamtwiderstand, der auf die Kugel bei ihrer Umströmung durch ein zähes Zweiphasenmedium ausgeübt wird, kann nach der Formel

(71) $$F = \varkappa_1 F_1 + \varkappa_2 F_2$$

berechnet werden. Berücksichtigen wir (70), so erhalten wir gemäß (71)

(72) $$F = 6\pi a \left(\varkappa_1 \mu_1 U_1 + \varkappa_2 \mu_2 U_2 \right) \quad .$$

Setzen wir in (71) und (72) $\mu_1 = \mu_2$, $U_1 = U_2$, dann gelangen wir zu der bekannten Stokesschen Formel für die Widerstandskraft bei der Bewegung einer Kugel in einer zähen homogenen Flüssigkeit [3], nämlich $F_1 = F_2 = F = 6\pi a \mu U$. Unter diesen Umständen können die Formeln (71) und (72) als Verallgemeinerung der Stokesschen Formel für die Umströmung einer Kugel durch ein zähes Zweiphasenmedium angesehen werden.

Bei Problemstellungen aus der Praxis interessiert man sich oft für die Zähigkeit des Zweiphasengemisches μ_G . Über die Beziehung (72) kann man zu einer einfachen Formel für μ_G gelangen. Betrachten wir unser Umströmungsproblem als eine Einphasenströmung, dann erhalten wir nach Stokes für die Widerstandskraft

$$F = 6\pi a \mu_G U_G \quad .$$

Setzen wir diese Formel mit (72) gleich und berücksichtigen dabei, daß $U_G = \varkappa_1 U_1 + \varkappa_2 U_2$ ist, dann ergibt sich

(73) $$\mu_G = \frac{\mu_1 + \mu_2 M}{1 + M} \quad ,$$

wobei $M = \dfrac{\varkappa_2 U_2}{\varkappa_1 U_1}$ ist. Liegt eine quasihomogene Umströmung ($U_1 = U_2$) vor, dann berechnet sich μ_G nach der einfachen Formel

$$\mu_G = \varkappa_1 \mu_1 + \varkappa_2 \mu_2 \qquad (74)$$

Es sei angemerkt, daß p, F und μ_G nach (65), (72) und (73) vom Wechselwirkungskoeffizient K unabhängig sind, wogegen die Geschwindigkeiten v_r und v_Θ nach (56) Funktionen von K sind. Die letzteren sind ebenfalls von K unabhängig, falls wir es mit einer quasihomogenen Umströmung zu tun haben. Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß nur durch experimentelle Untersuchungen die Richtigkeit der erhaltenen Lösung nachgewiesen und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit aufgezeigt werden kann.

Literatur

[1] Рахматулин, Х.А., Основы гидродинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред, ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen, Teil I Gewöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig 1959

[3] Kotschin N.J., Kibel I.A., Rose N.W., Theoretische Hydromechanik, Band II, Akademie-Verlag, Berlin, 1955