J. Szlaza

Konvektiver Stoffübergang bei der Umströmung einer ebenen Platte durch ein Zweikomponentenmedium

In der vorliegenden Arbeit wird der Übertragungsprozeß eines in einem Zweikomponentenmedium eingelagerten Stoffes an eine ebene Platte untersucht. Die Strömung wird als laminar angesehen. Bei den Untersuchungen wird an die Ergebnisse aus [1] und [2] angeknüpft und eine Formel für den Diffusionsstrom angegeben.

I. Problemstellung

Eine ebene Platte $(y = 0 \ , \ x \geqq 0)$ befinde sich in der laminaren stationären quasihomogenen $(U_1 = U_2 = U_o)$ Strömung eines zähen Zweikomponentenmediums. Die wirklichen und reduzierten Dichten der beiden Komponenten seien konstant, d.h. $\varrho_i^* = \text{const.}$ und $\varrho_i = \text{const.}$ Die erste Komponente, die eine Flüssigkeit sein soll und als Trägermedium dient, enthalte eine geringe Beimischung, die mit der zweiten Komponente nicht reagiert aber im Kontakt mit der ebenen Platte zu chemischen oder physikalisch-chemischen Umwandlungen führt. Die Konzentration c der Beimischung, d.h. die Anzahl der eingelagerten Stoffteilchen in der Volumeneinheit der ersten Komponente, sei klein. Dann kann man den Diffusionskoeffizient D als konstant voraussetzen. Wie bekannt [3], spielen sich die wesentlichsten Prozesse bei der Diffusion in Flüssigkeiten in unmittelbarer Nähe der Reaktionsoberflächen in den sogenannten Diffusionsgrenzschichten ab. Hier ist eine deutliche Änderung der Konzentration des eingelagerten Stoffes zu beobachten. Außerhalb der Diffusionsgrenzschicht ist die Konzentration konstant. Die Gleichung für die konvektive Diffusion in der Diffusionsgrenzschicht hat in unserem Fall die Gestalt

$$u_1 \frac{\partial c}{\partial x} + v_1 \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} , \tag{1}$$

wobei

c - die Konzentration der Beimischung

D - der Diffusionskoeffizient

u_1, v_1 - die Geschwindigkeiten der ersten Komponente in x- und y-Richtung

sind.

Wir wissen, daß die Dicke der Diffusionsgrenzschicht δ um ein Vielfaches kleiner ist als die Dicke der hydrodynamischen Grenzschicht δ_1 . Somit gilt in der Diffusionsgrenzschicht

$$y < \delta < \delta_1 . \tag{2}$$

Daraus ergibt sich, daß die Geschwindigkeiten u_1, v_1 aus der Lösung des hydrodynamischen Grenzschichtproblems für eine ebene Platte gewonnen werden können. Hierbei knüpfen wir an die Ergebnisse aus [2] an, wo für die Geschwindigkeitsprofile u_1 folgende Formel gefunden wurde:

$$u_1 = U_o \left\{ \frac{2y}{\delta_1} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^2 \right] + \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^4 \right\}$$

Wegen (2) können wir diesen Ausdruck vereinfachen und

$$u_1 = \frac{2y\, U_o}{\delta_1} \tag{3}$$

schreiben. Aus der Kontinuitätsgleichung erhält man

$$(4) \qquad v_1 = \frac{y^2 U_o}{\delta_1^2} \delta_1' .$$

Dabei ist gemäß [2]

$$(5) \qquad \delta_1 = \delta_o + \frac{20 \varrho_1 \varrho_2^2 (\nu_2 - \nu_1)}{3K (\varrho_1 + \varrho_2)^2 \delta_o} \left[\bar{x} - E(\bar{x}) \right] ,$$

wobei

$$\delta_o = 5,83 \sqrt{\frac{\nu_1 x}{U_o}}$$

$$(6) \qquad E(\bar{x}) = 1 - e^{-\bar{x}}$$

$$\bar{x} = 2,554 \cdot \frac{K}{U_o} \cdot \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1 \varrho_2} x$$

und ν_i die kinematischen Zähigkeitskoeffizienten der Gemischkomponenten und K der Wechselwirkungskoeffizient zwischen den Komponenten sind.

Zur Auffindung der Lösung von (1) sind noch Randbedingungen erforderlich. Da die Änderung der Konzentration in erster Linie in der Diffusionsgrenzschicht erfolgt, können wir in weiter Entfernung von der Reaktionsoberfläche folgende Bedingung angeben:

$$(7) \qquad c = c_o \quad \text{für} \quad y \longrightarrow \infty ,$$

wobei y der Abstand von der ebenen Platte ist.

Die Gestalt der Randbedingung auf der Reaktionsoberfläche, d.h. für $y = 0$, hängt von dem Charakter der ablaufenden physikalisch-chemischen Prozesse ab. Wir nehmen an, daß die Reaktionsgeschwindigkeit gegenüber der Übertragungsgeschwindigkeit des Stoffes so groß ist, daß alle auf die ebene Platte auftreffenden Stoffteilchen sofort mit dieser reagieren. In diesem Fall haben wir es mit dem größtmöglichen Diffusionsstrom zu tun und die entsprechende Randbedingung läßt sich in der Gestalt

$$(8) \qquad c = 0 \quad \text{für} \quad y = 0$$

schreiben. Weiterhin fordern wir noch, daß die Konzentration c im Anströmpunkt keine Singularitäten besitzt, wie etwa in unserem Fall

$$(9) \qquad c = 0 \quad \text{für } x = 0, \quad y = 0 \; .$$

Das Problem besteht nun in der Lösung der Gleichung (1) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (7)-(9).

II. Lösung des Problems

Wegen der Kontinuitätsgleichung gelten die Beziehungen

$$(10) \qquad u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \; ,$$

wobei ψ die Stromfunktion ist. Aus (10) läßt sich unter Berücksichtigung von (3) und (4) die Stromfunktion ψ mit einer Genauigkeit bis auf eine beliebige Konstante ermitteln. Die letztere wählen wir so, daß für $y = 0$ die Stromfunktion verschwindet. Demnach erhalten wir

$$(11) \qquad \psi = \frac{y^2 U_o}{\delta_1} \; .$$

Gehen wir nun in der Gleichung (1) von den Variablen x,y zu den Variablen x , ψ über und berücksichtigen dabei (3) und (11), so gelangen wir zu der Gleichung

$$(12) \qquad \frac{\partial c}{\partial x} = 2\sqrt{\frac{U_o}{\sigma_1}}\, D \,\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sqrt{\psi}\frac{\partial c}{\partial \psi}\right) \quad .$$

Diese Gleichung kann man wiederum in der Gestalt

$$(13) \qquad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sqrt{\psi}\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)$$

schreiben, wobei

$$(14) \qquad t = 2D\sqrt{U_o}\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{\sigma_1}}$$

ist. Die entsprechenden Randbedingungen lauten

$$(15) \qquad \begin{array}{lll} c = 0 & \text{für} & \psi = 0 \\ c = c_o & \text{für} & \psi \longrightarrow \infty \quad . \end{array}$$

Führen wir in der Gleichung (13) eine einfache Dimensionsanalyse durch, dann sehen wir, daß die Lösung $c(\psi, t)$ von den Variablen ψ, t nur über die Kombination

$$(16) \qquad \eta = \frac{\psi}{t^{\frac{2}{3}}}$$

abhängt.

Demnach können wir die Gleichung (13) in der Form

$$(17) \qquad \frac{d^2c}{dz^2} + \frac{4}{3}\, z^2\, \frac{dc}{dz} = 0$$

schreiben, wobei

$$(18) \qquad z = \sqrt{\eta}$$

ist. Die Gleichung (17) läßt sich einfach integrieren und wir erhalten unter Berücksichtigung der Bedingungen (15) folgende Formel für die Konzentration:

$$(19) \qquad c(z) = \frac{c_o}{1,15} \int_0^z \exp\left\{-\frac{4}{9} z^3\right\} dz \, .$$

Für den Diffusionsstrom auf der Plattenoberfläche ergeben sich dann

$$(20) \qquad j = D \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=o} = \frac{D\, c_o}{1,15} \, \Phi(x) \, ,$$

wobei

$$(21) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \left(\frac{U_o}{2D}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{\sigma_1}}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

ist. Im weiteren berechnen wir das Integral aus der Formel (21). Wegen (5) und (6) gilt

$$(22) \qquad J = \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{\sigma_1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha\beta + \varepsilon^2}} \int_o^x \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\alpha\beta + \varepsilon^2} \, \frac{1 - e^{-\beta x}}{x}}} \, ,$$

wobei

$$\alpha = \frac{20\, \varrho_1\, \varrho_2^2\, (\nu_2 - \nu_1)}{3K\, (\varrho_1 + \varrho_2)^2}$$

$$(23) \qquad \beta = 2,554 \, \frac{k}{U_o} \, \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1\, \varrho_2}$$

$$\varepsilon = 5,83 \sqrt{\frac{\nu_1}{U_o}}$$

sind. Im Rahmen der von uns in [2] betrachteten Näherung, für die ν_1 und ν_2 sich wenig voneinander unterscheiden, gilt für alle $x \geqq 0$

$$\left| \frac{\alpha}{\alpha\beta + \varepsilon^2} \quad \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \right| \ll 1 \quad ,$$

so daß wir (22) angenähert in der Form

$$J = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha\beta + \varepsilon^2}} \int_0^x \left[x^{-\frac{1}{4}} \quad 1 + \frac{\alpha}{2(\alpha\beta + \varepsilon^2)} \quad \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \right] dx$$

schreiben können. Lösen wir nun dieses Integral und setzen den gewonnenen Ausdruck in (21) und (20) ein, dann gelangen wir zu folgender Formel für den Diffusionsstrom:

$$j = \frac{c_o \, D^{\frac{2}{3}}}{1{,}15} \left(\frac{U_o}{2} \right)^{\frac{1}{3}} F\,(x\,;\ \rho_i\,,\ \nu_i\,,\ K\,,\ U_o)\ , \tag{24}$$

wobei

$$F\,(x\,;\ \rho_i\,,\ \nu_i\,,\ K\,,\ U_o) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha\beta + \varepsilon^2} \right)^{-\frac{1}{6}} \left\{ \frac{4}{3}\, x^{\frac{3}{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\alpha}{\alpha\beta + \varepsilon^2} \left[\frac{e^{-\beta x} - 1}{x^{\frac{1}{4}}} + \beta^{\frac{1}{4}} \ \gamma\left(\tfrac{3}{4}\,,\ \beta x\right) \right] \right\}^{-\frac{1}{3}}$$

und $\gamma(\frac{3}{4}\,, \beta x)$ eine unvollständige Gammafunktion sind und α, β, ε, σ_1 sich nach (23) und (5) bestimmen lassen.

Obwohl die erste Komponente, die als Trägermedium dient, für die Stoffübertragung verantwortlich ist und die Bemischung nicht mit der zweiten Komponente sondern nur mit der Plattenoberfläche reagiert, hat die zweite Komponente, wie aus (24) zu ersehen ist, einen Einfluß auf den Diffusionsstrom, der durch die Größen α, β, ε zum Ausdruck kommt. Die Funktion F strebt für $x \to 0$

gegen Unendlich und für $x \to \infty$ gegen Null. Demnach verhält sich der Diffusionsstrom j qualitativ genauso wie der Diffusionsstrom bei konvektiver Stoffübertragung in einem homogenen Medium. Lassen wir in (24) $\varrho_1 \to \varrho_2$ und $\nu_1 \to \nu_2$ streben, dann erhalten wir die Formel für den Diffusionsstrom j in einem homogenen Medium, wie sie in [3] gefunden wurde, nämlich

$$j^{*} = 0{,}36 \, \frac{c_o D^{\frac{2}{3}}}{\nu^{\frac{1}{6}}} \sqrt{\frac{U_o}{x}} \quad . \tag{26}$$

Schließlich läßt sich noch die Dicke der Diffusionsgrenzschicht wie folgt bestimmen

$$\delta = \frac{Dc_o}{j} = 1{,}15 \left(\frac{2D}{U_o}\right)^{\frac{1}{3}} \left[F(x \, ; \varrho_i \, , \varrho_i \, , K \, , U_o)\right]^{-1} \quad . \tag{27}$$

Hieraus ist zu ersehen, daß δ, wie auch für homogene Medien, proportional $D^{\frac{1}{3}}$ ist, aber auf recht komplizierte Weise von ϱ_i, ν_i und U_o abhängt. Als Funktion von x ist $\delta = 0$ für $x = 0$ und wächst an mit wachsendem x.

Literatur

[1] Рахматулин Х.А., Основы гидродинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред, П М М, Т. XX, вып. 2, 1956

[2] Szlaza J., Zur laminaren Grenzschichtströmung eines Zweiphasenmediums, Monatsberichte der DAW zu Berlin, Bd. 13, H. 3, 1971

[3] Левич В.Г., физико-химическая гидродинамика, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959