Международная конференция «Четвёртые Окуневские чтения». Тезисы докладов. СПб, 2004. С.135. Материалы докладов, том 3, СПб, 2005. С.14-17.

# АСИМПТОТИКА И *МЯГКАЯ* МАТЕМАТИКА

Р.Г.БАРАНЦЕВ
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
т. (812) 535-65-98, факс (812) 428-69-89, E-mail: brem@mail.ru

Представление об асимптотическом приближении существовало очень давно, но математический смысл оно обрело лишь в конце XIX века, когда Анри Пуанкаре ввёл понятие асимптотического ряда и дал строгое определение асимптотического разложения. В XX веке асимптотические методы нашли широкое применение в самых разных областях прикладной математики. При этом арсенал асимптотических методов вырос в такое причудливое многообразие, что дать общее определение асимптотической методологии оказалось довольно трудно.

В 1963 году М.Д. Крускал ввёл термин *асимптотология*, назвав так искусство обращения с прикладными математическими системами в предельных случаях [1]. Попытки превращения этого искусства в науку показали, что формализованные определения оказываются слишком узкими, а достаточно широкие определения не удовлетворяют принятым требованиям научности. Асимптотология фактически не умещалась в рамки традиционной научной парадигмы.

В работе [2] мы определили асимптотические методы как методы упрощения за счёт локализации, точность которых растёт вместе с локализацией. Таким образом, в асимптотической методологии взаимодействуют три фактора: точность, локальность и простота. Например, в случае разложения некоторой функции f(x) по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ при $x \to 0$ величина $\Delta = \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) \right|$ характеризует точность, x – локальность, N – простоту.

В типичной ситуации (см., напр., [3]) при заданном достаточно малом x точность с ростом N улучшается, но затем становится хуже, если ряд расходится. Фиксируя N, можно наблюдать улучшение точности с уменьшением x. Заданная точность Δ достигается с ростом N тем раньше, чем меньше x. Следовательно, каждая пара из этих трёх величин находится в соотношении дополнительности, а третья задаёт меру совместности.

В классической математике x фиксировано, $N \to \infty$ и говорится о сходимости; в асимптотической математике N фиксировано, $x \to 0$ и говорится об эффективности приближения, выражающейся в оптимальном сочетании простоты и точности. В заданной области точность асимптотического решения неизбежно ограничена. Эта неполная точность асимптотических методов всегда ставила их в положение второсортных, неполноценных.

Классическая парадигма опиралась на точную математику, которая считалась, с благословения И.Канта, мерилом научности. Однако, в своём стремлении к однозначной определённости, безусловной объективности, предельной полноте описания традиционная наука отрывалась от реальной жизни с её гибкостью, открытостью, свободой воли. В гуманитарной сфере неопределённость повсеместна, субъективность неизбежна, полнота недостижима. Здесь приходится иметь дело «с новым типом сложности, связанным с человеческой интуицией и человеческими эмоциями» [4].

Идеал полноты стал уступать место идеалу целостности [5]. И от математики потребовалось, при сохранении достаточной точности, умение не разрушать целостность изучаемого объекта. Греческий термин asymptotos означает *несовпадающий*, подчёркивая тем самым, что асимптотическое приближение не превращается в совпадение. Также и целостность не превращается в полноту.

Потребность в очеловечивании науки породила идею *мягкой математики*, которая всё более настойчиво стала проситься в парадигму. Появились многозначные логики, нечёткие множества, нестандартный анализ. Но, даже перейдя на вероятностный язык, они фактически уходили от существа проблемы, так как, оказавшись перед онтологической неточностью, описывать её стремились всё равно точно. Целостность оставалась неподвластной.

Потребность в *очеловечивании* математики возникает как *ересь*. А.Гротендик, обнаружив, что страсть к математике уводит от реальности, отдаляя от загадок человеческой души [6], выходит из группы Бурбаки. Р.Пенроуз, установив *невычислимость сознания*, говорит о необходимости новой физики [7]. Р.Хирш настаивает на включении математики в гуманитарную культуру [8].

Размышляя над теоремой Гёделя о неполноте формальных систем, А.Н.Паршин в ответ на иронические слова П.Коэна «Жизнь была бы гораздо *приятнее*, не будь гильбертова программа потрясена открытиями Гёделя», решительно заявляет: «Если бы не было теоремы Гёделя, то жизнь не только не была бы приятнее, её просто не было бы» ([9], с.94). И продолжает: «Должна существовать теорема Гёделя и в биологии, показывающая невозможность полного описания живых организмов в чисто генетических терминах» (с.109).

Идея *мягкой математики* всё более обнаруживает свою привлекательность. Гуманитаризация математики обсуждается как тенденция развития современной науки [10]. Приобщение математики к *мягким наукам* видится как заманчивая перспектива за Геркулесовыми столбами жёстких канонов [11]. *Мягкое исчисление* рассматривается как маркер новой парадигмы [12].

Как это часто бывает, искомое новое обнаруживается в затёртом старом. Требуется лишь посмотреть на него свежими глазами. Асимптотические методы сто лет терпеливо, как Золушка, трудились на кухне классической математики, униженные комплексом неполноценности. Отдавая им должное как искусству [1,13], в настоящую науку их всё же не пускали: не позволяла неустранимая неточность. И вот в конце XX века этот *гадкий утёнок* неодолимо вырастает в *лебедя* новой парадигмы [14]. В нём есть всё, что искали: мягкость, гибкость, открытость. И контролируемая оценка точности. Правда, точность в конечной области всегда ограничена. Но это неизбежная плата за сохранение целостности, воплощаемой в балансе точности, локальности и простоты.

Классическая математика продолжает оставаться идеалом, отождествляемым с Абсолютом, путь к которому идёт «через постижение гармонии мира, выраженной в гармонии чисел» [10]. Но человек – конечен. И всякая попытка познать, обуздать, покорить бесконечность, ведёт к парадоксам [15]. Изощрённые модели порождают чудовища формализма, не менее опасные, чем химеры мистики ([16], с.199). На бесконечном пути к божественной истине человек нуждается в опоре на истину человеческую [17]. А она неоднозначна, как и, кстати говоря, понятие точности. Более того, она ограничена масштабами человеческого мира. Двусторонние границы имеют место и в концепции сплошной среды, и во фрактальной геометрии, и в космогонии [18]. Предельная экстраполяция, принятая в классической математике, уводит из естественного мира жизни в искусственное пространство абстракций. Асимптотическая математика свободна от этой повинности. В ней есть запретный *рубеж Планка* [19].

Существенно, что асимптотическая математика прекрасно вписывается в синергетику, ставшую ответственным проводником новой парадигмы в самом широком смысле [20]. Их роднит динамизм методов: от предела – к приближению, от бытия – к становлению, от полноты – к целостности. Открытость синергетической методологии гармонирует с гибкостью асимптотической математики, и обе тенденции направлены на постижение феномена жизни. Динамизм, на котором держится неустойчивая, нелинейная, недетерминированная жизнь, разрешает тупиковые противоречия отмирающей парадигмы, жертвуя несуществующей полнотой, но сохраняя сущностную целостность. В новую парадигму целостность приходит через синергетику, в математику – через асимптотологию [21].

Литература.


1. Kruskal M. Asymptotology // Math. Models in Phys. Sci. N.J., 1963, p.17-48.
2. Баранцев Р.Г. Об асимптотологии // Вестн. Ленингр. Ун-та, 1976, №1, с.69-77.
3. Barantsev R.G. Asymptotic versus classical mathematics // Topics in Math. Analysis. Singapore: World Sci. 1989, p.49-64.
4. Майнцер К. Сложность и самоорганизация. Возникновение новой науки и культуры на рубеже века // Синергетическая парадигма. М.: Прогресс-Традиция, 2000, с.56-79.
5. Баранцев Р.Г. От полноты – к целостности // Проблемы цивилизации. СПб: СПбГУ, 1992, с.5-11. Целостность против полноты // Русская философия и современный мир. СПб, 1995, с.29-31.
6. Гротендик А.Урожаи и посевы. Размышления о прошлом математика. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2002, 288 с.
7. Penrose R. Shadows of the mind: A search for the missing science of consciousness. Oxford, 1995, 457 p.
8. Hersh R. What is mathematics, really? Oxford, 1997, 343 p.
9. Паршин А.Н. Размышления над теоремой Гёделя // Вопросы философии, 2000, №6, с.92-109.
10. Панов М.И. Гуманитаризация математики – тенденция развития науки XX века: (можно ли считать математику сплавом культуры, философии, религии?) Обзор // РЖ, сер.3, философия, 1991, №6, с.21-30.
11. DevlinK.Goodbye, Descartes: The end of logic and the search for a new cosmology of the mind. N.Y., 1997, 320 p. See also: Davis Ph. Beyond the pillars of Hercules: Soft mathematics // SIAM News, 1998, No.6.
12. Кондратьев В.Г., Солодухина М.А. Мягкое исчисление как новая парадигма. Обзор // РЖ, сер.3, философия, 2000, №3, с.34-41.
13. .Бабич В.М., Булдырев В.С. Искусство асимптотики // Вестн. Ленингр. ун-та, 1977, №13, с.5-12.
14. Баранцев Р.Г. На пути к мягкой математике // История и методология науки. Пермь, 2002, в.9, с.5-9.
15. Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М., 1997, 400 с.
16. Свасьян К.А. Становление европейской науки. Ереван, 1990, 377 с.
17. Захаров В.Д. Истина в науках о природе. I. Математика и истина // Вестн. РУДН, сер. философии, 2000, №1, с.92-105.
18. Баранцев Р.Г. Синергетика в современном естествознании. М.: Едиториал УРСС, 2003, 144 с..
19. Баранцев Р.Г. Принцип неопределённости-дополнительности-совместности в тринитарной методологии // Научные труды РИМЭ, Рига, 2001, в.5, с.91-95.
20. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики. СПб:Алетейя,2002, 414 с.
21. Баранцев Р.Г. Неизбежность асимптотической математики // Математика. Компьютер. Образование. М.: Прогресс-Традиция, 2000, т.7, ч.1, с.27-33.