

Sonderdruck aus

Monatsberichte

der Deutschen Akademie der Wissenschaften
zu Berlin

Band 13 · Heft 3 · 1971



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

MONATSBERICHTE
DER DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN

Mitteilungen aus Mathematik, Naturwissenschaft, Medizin und Technik

BAND 13

1971

HEFT 3

I. Originalarbeiten

Mathematik

J. SZLAŽA

Institut für angewandte Mathematik und Mechanik der Dt. Akad. Wiss.

Zur laminaren Grenzschichtströmung eines Zweiphasenmediums

I. Einleitung

Genauso wie bei Einphasenströmungen, spielen auch bei der Umströmung von Körpern durch Zweiphasenmedien die Grenzschichtprobleme eine wichtige Rolle. Aber im Unterschied zu den homogenen Medien sind die Grenzschichtgleichungen für Mehrphasenströmungen bedeutend komplizierter, was vor allen Dingen durch die Wechselwirkung zwischen den Phasen bedingt ist. Die Lösung der auftretenden Gleichungen ist mit beträchtlichen mathematischen Schwierigkeiten verbunden. Bei der Aufstellung der Grenzschichtgleichungen ist es wichtig, von welchem Modell man ausgeht. In unseren Betrachtungen stützen wir uns auf das Modell von CH. A. RACHMATULIN [1], das gute Ansatzmöglichkeiten zur Beschreibung einer Zweiphasenströmung in der Grenzschicht liefert. In diesem Falle wird die Strömung jeder Phase als Strömung in einem sich bewegenden und verändernden porösen Medium betrachtet, das durch die andere Phase gebildet wird. Wir haben es also hier mit einem Modell von sich gegenseitig durchdringenden Phasen zu tun, die – jede für sich – als Kontinuum betrachtet werden. Für zähe Phasen gelten hier an der Wand die Haftbedingungen. Im RACHMATULINSchen Modell wird die Wechselwirkung zwischen den Phasen sowohl über die Kräfte, die proportional den relativen Geschwindigkeiten sind, als auch über die Querschnittsänderung der Stromröhren (Diffusor-Effekt) berücksichtigt. Den hierbei auftretenden Wechselwirkungskoeffizient K werden wir in unseren Überlegungen als konstant voraussetzen.

Die theoretische Untersuchung von Grenzschichtströmungen eines Zweiphasenmediums wird eine große Rolle spielen, da bis zum heutigen Tage

die Grenzschicht bei einer Zweiphasenströmung, sogar auch für den laminaren Fall, so gut wie gar nicht experimentell untersucht worden ist. Durch diese theoretischen Ergebnisse können gewisse Aussagen über den Verlauf der Grenzschicht bei einer Zweiphasenströmung gemacht werden, die dann später natürlich einer Bestätigung durch das Experiment bedürfen. Aus dem Experiment müssen sich dann auch gewisse Schlußfolgerungen ergeben, für welche Zweiphasenmedien sich Untersuchungen der Grenzschicht mit Hilfe des RACHMATULINSCHEN Modells durchführen lassen.

Die vorliegende Arbeit soll als ein Beitrag zur Entwicklung der Grenzschichttheorie für Mehrphasenströmungen betrachtet werden. Sie erhebt aber keinen Anspruch auf Universalität, da von einer ganz bestimmten Modellvorstellung für Mehrphasenströmungen ausgegangen wird.

In der vorliegenden Arbeit werden, ausgehend vom RACHMATULINSCHEN Modell, die Grenzschichtgleichungen für eine Zweiphasenströmung hergeleitet, mit deren Hilfe dann der Impulssatz formuliert wird. Unter Verwendung dieses Impulssatzes wird das einparametrische Näherungsverfahren nach v. KÁRMÁN-POHLHAUSEN [2] auf eine Zweiphasengrenzschichtströmung übertragen.

Im letzten Kapitel wird schließlich die „quasihomogene“ Umströmung ($U_1 = U_2$) einer Platte durch ein Zweiphasenmedium behandelt.

II. Die Herleitung der Grenzschichtgleichungen

Wir betrachten die laminare ebene Strömung eines zähen Zweiphasenmediums um einen Körper. Der Wärmeaustausch wird nicht berücksichtigt. Die wirklichen und reduzierten Dichten seien konstant, d. h. $\varrho_i^* = \text{const.}$ und $\varrho_i = \text{const.}$, und von gleicher Größenordnung. Weiterhin sollen die Geschwindigkeiten der Phasen im Unendlichen U_i von gleicher Größenordnung sein.

Nach RACHMATULIN haben wir dann in diesem Falle folgendes Gleichungssystem:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= -\frac{1}{\varrho_i^*} \frac{\partial p}{\partial x} + v_i \Delta u_i + \frac{K}{\varrho_i} \sum_{j=1}^2 (u_j - u_i) \\ \frac{dv_i}{dt} &= -\frac{1}{\varrho_i^*} \frac{\partial p}{\partial y} + v_i \Delta v_i + \frac{K}{\varrho_i} \sum_{j=1}^2 (v_j - v_i) \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} &= 0 \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

wobei

u_i, v_i – die Geschwindigkeitskomponenten der Phasen in x - und y -Richtung,
 ϱ_i^*, ϱ_i – die wirklichen und reduzierten Dichten der Phasen,

- ν_i – die kinematischen Zähigkeitskoeffizienten der Phasen,
 p – der Druck im Zweiphasenmedium und
 K – der Wechselwirkungskoeffizient der ersten mit der zweiten Phase sind.

Wir nehmen an, daß $K = \text{const.}$ ist. Wir betrachten das Gleichungssystem (1) in der Nähe der Wand und wollen nun die einzelnen Glieder in (1) abschätzen. Dazu schreiben wir die Gleichungen in der dimensionslosen Form. Wir führen die folgenden dimensionslosen Größen ein:

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{x}{L}, & y'_i &= \frac{y}{\delta_i}, & u'_i &= \frac{u_i}{U_i}, & v'_i &= \frac{v_i}{V_i}, \\ t' &= \frac{t U_1}{L}, & p' &= \frac{p}{\rho_1^* U_1^2}, & K' &= \frac{L}{\rho_1 U_1} K. \end{aligned}$$

Hierbei sind

- L – die charakteristische Länge des Körpers,
 δ_i – eine unbekannte Querlänge für die i -te Phase,
 U_i – die x -Komponente der Geschwindigkeit der i -ten Phase in weiter Entfernung vom Körper,
 V_i – eine unbekannte Geschwindigkeit der i -ten Phase.

Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir nach einfachen Umformungen folgende dimensionslosen Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{U_1}{U_i} \frac{\partial u'_i}{\partial t'} + u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x'} + \frac{V_i L}{U_i \delta_i} v'_i \frac{\partial u'_i}{\partial y'_i} &= - \frac{\rho_1^* U_1^2}{\rho_i^* U_i^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu_i}{U_i L} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'^2} \\ &+ \frac{\nu_i L}{\delta_i^2 U_i} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial y_i'^2} + \frac{\rho_1 U_1}{\rho_i U_i} K' \sum_{j=1}^2 \left(\frac{U_j}{U_i} u'_j - u'_i \right) \\ \frac{U_1}{U_i} \frac{\partial v'_i}{\partial t'} + u'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x'} + \frac{V_i L}{U_i \delta_i} v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial y'_i} &= - \frac{\rho_1^* U_1^2 L}{\rho_i^* U_i V_i \delta_i} \frac{\partial p'}{\partial y'_i} \\ &+ \frac{\nu_i}{U_i L} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x'^2} + \frac{\nu_i L}{\delta_i^2 U_i} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial y_i'^2} + \frac{\rho_1 U_1}{\rho_i U_i} K' \sum_{j=1}^2 \left(\frac{V_j}{V_i} v'_j - v'_i \right) \\ \frac{\partial u'_i}{\partial x'} + \frac{L V_i}{\delta_i U_i} \frac{\partial v'_i}{\partial y'_i} &= 0 \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Als Hauptmaßstäbe werden wir die Größen L und U_i betrachten. Mit ihrer Hilfe definieren wir die REYNOLDS-Zahl für die i -te Phase

$$(4) \quad \text{Re}_i = \frac{L U_i}{\nu_i}.$$

Mir brauchen nun nur noch über die Maßstäbe der Querlängen und -geschwindigkeiten δ_i und V_i zu verfügen. Wir wählen sie so, daß das Gleichungssystem (3) als einziger Parameter die REYNOLDS-Zahlen Re_i und die Quotienten $\frac{U_i}{U_j}$, $\frac{\rho_i}{\rho_j}$, $\frac{\rho_i^*}{\rho_j^*}$ enthält, die von der Größenordnung Eins sind.

Wie leicht zu sehen ist, müssen wir dann

$$(5) \quad \frac{LV_i}{\delta_i U_i} = 1 \quad \frac{v_i L}{\delta_i^2 U_i} = 1 \quad i = 1, 2$$

setzen, wobei wir zur Vereinfachung der endgültigen Gleichungen auf der rechten Seite von (5) eine 1 schreiben, was natürlich willkürlich geschieht. Aus (5) und (4) erhalten wir folgende Definitionen für die Maßstäbe δ_i und V_i :

$$(6) \quad \delta_i = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}_i}} \quad V_i = \frac{U_i}{\sqrt{\text{Re}_i}} \quad i = 1, 2.$$

Wir sehen also, daß sich auch δ_i und V_i nach den Hauptmaßstäben L und U_i ausdrücken lassen. Unter den so gewählten Maßstäben nimmt das Gleichungssystem (3) folgende Form an:

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{U_1}{U_i} \frac{\partial u'_i}{\partial t'} + u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x'} + v'_i \frac{\partial u'_i}{\partial y'_i} &= - \frac{\varrho_1^* U_1^2}{\varrho_i^* U_i^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}_i} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'^2} \\ &+ \frac{\partial^2 u'_i}{\partial y_i'^2} + \frac{\varrho_1 U_1}{\varrho_i U_i} K' \sum_{j=1}^2 \left(\frac{U_j}{U_i} u'_j - u'_i \right) \\ \frac{1}{\text{Re}_i} \left[\frac{U_1}{U_i} \frac{\partial v'_i}{\partial t'} + u'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x'} + v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial y'_i} \right] &= - \frac{\varrho_1^* U_1^2}{\varrho_i^* U_i^2} \frac{\partial p'}{\partial y'_i} + \frac{1}{\text{Re}_i^2} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x'^2} \\ &+ \frac{1}{\text{Re}_i} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial y_i'^2} + \frac{1}{\text{Re}_i} \frac{\varrho_1 U_1}{\varrho_i U_i} K' \sum_{j=1}^2 \left(\frac{U_j}{U_i} \sqrt{\frac{\text{Re}_i}{\text{Re}_j}} v'_j - v'_i \right) \\ \frac{\partial u'_i}{\partial x'} + \frac{\partial v'_i}{\partial y'_i} &= 0 \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Es seien nun $\text{Re}_i \gg 1$. Das Gleichungssystem (7) enthält dann einen kleinen Parameter, und zwar $1/\sqrt{\text{Re}_i}$, der auch in (6) eingeht und von dem somit auch die Querkoordinaten und -geschwindigkeiten abhängen. Lassen wir Re_i gegen Unendlich streben und nehmen an, daß dabei u'_i , v'_i , p' gegen endliche Limesfunktionen konvergieren, dann erhalten wir, nachdem wir wieder zu den dimensionsbehafteten Größen übergegangen sind, folgende Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= - \frac{1}{\varrho_i^*} \frac{\partial p}{\partial x} + v_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{K}{\varrho_i} \sum_{j=1}^2 (u_j - u_i) \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} &= 0 \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Wie unmittelbar aus (6) zu ersehen ist, entsprechen endlichen Werten der dimensionslosen Querkoordinaten y'_i für große Re_i kleine Werte der dimensionsbehafteten Koordinaten y . Die Gleichungen (8) beschreiben demzufolge

die Bewegung der i -ten Phase in einem engen Gebiet entlang der Ausgangsstromlinie. Gemäß (6) streben für $Re_i \rightarrow \infty$ die Ausmaße dieses Gebietes gegen Null wie $1/\sqrt{Re_i}$. Wir bezeichnen dieses Gebiet als Grenzschicht und (8) als Grenzschichtgleichungen für die i -te Phase. Das Gleichungssystem (8) ist unbestimmt, da es aus vier Gleichungen besteht, aber fünf unbekannte Funktionen (u_i, v_i, p) enthält. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, übertragen wir die von PRANDTL bezüglich einer homogenen Strömung angestellten Überlegungen auf die Grenzschichtströmung eines Zweiphasenmediums. Es wird nämlich angenommen, daß für große REYNOLDS-Zahlen der Einfluß der Grenzschicht auf die Außenströmung vernachlässigt werden kann. Mit anderen Worten, es wird vorausgesetzt, daß die Druckverteilung in der Grenzschicht mit der Druckverteilung auf der Körperoberfläche bei Nichtvorhandensein der Grenzschicht übereinstimmt. Wenn wir dann mit $U_i = U_i(x, t)$ die Längsgeschwindigkeiten der Phasen in der Potentialströmung bezeichnen und bemerken, daß auf der Körperoberfläche $v_i = 0$ ist, so erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen des Systems (8)

$$(9) \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = - \frac{1}{\varrho_i^*} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{\varrho_i} \sum_{j=1}^2 (U_j - U_i) \quad i = 1, 2.$$

Die so definierten Geschwindigkeiten U_i werden wir als Geschwindigkeiten der einzelnen Phasen auf dem Außenrand der Grenzschicht bezeichnen, wobei diese gemäß (9) der Gleichung

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} [\varrho_2^* U_2 - \varrho_1^* U_1] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\varrho_2^* U_2^2 - \varrho_1^* U_1^2] = \frac{K}{f_1 f_2} (U_1 - U_2)$$

$$\left(f_i = \frac{\varrho_i}{\varrho_i^*} \right)$$

genügen müssen. Wird U_1 vorgegeben, dann erhält man nach (10) zur Bestimmung von U_2 im instationären Fall eine partielle Differentialgleichung und im stationären Fall eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Zur Lösung von praktischen Aufgaben erscheint es sinnvoll, die Längsgeschwindigkeiten der Phasen U_i in der Gestalt von Polynomen anzugeben. Wird dabei U_1 vorgegeben, dann erhält man aus (10) durch Koeffizientenvergleich im instationären Fall ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen und im stationären Fall ein System von algebraischen Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten für U_2 .

Sind die U_i bekannt, dann kann man nach (9) $\frac{\partial p}{\partial x}$ ausdrücken und in (8) einsetzen. Wir erhalten demnach folgendes Gleichungssystem für die Bewegung eines zähen inkompressiblen Zweiphasenmediums in der Nähe einer

Wand:

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} &= \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \\ &+ \frac{K}{\varrho_i} \sum_{j=1}^2 [(u_j - U_j) - (u_i - U_i)] \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} &= 0 \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Bei der Umströmung eines Körpers haben die Randbedingungen gewöhnlich die Form

$$(12) \quad \begin{aligned} u_i = v_i = 0 & \quad \text{für } y = 0 \\ u_i \rightarrow U_i & \quad \text{für } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (11) sind genauso wie bei einer homogenen Strömung nicht-linear. Im Unterschied aber zu den letzteren haben wir hier ein System von Kontinuitäts- und Bewegungsgleichungen, was durch die Wechselwirkung zwischen den Phasen hervorgerufen wird. Erste Untersuchungen der Gleichungen (11) haben ergeben, daß auch in den einfachsten Fällen keine exakten Lösungen zu erwarten sind. Hier ist es infolge der Wechselwirkung der Phasen nicht möglich, derartige Ähnlichkeitskoordinaten und -parameter einzuführen, die eine Überführung der entsprechenden nichtlinearen Gleichungen für die Stromfunktionen der Phasen in gewöhnliche Differentialgleichungen gestatten würde, wie es für einfache homogene Grenzschichtströmungen der Fall ist. Der nächste Schritt zur Untersuchung der Gleichungen (11) muß nun darin bestehen, daß man nach geeigneten Näherungsmethoden sucht, die zu einer analytischen oder einfachen numerischen Lösung von bestimmten Grenzschichtproblemen für Zweiphasenströmungen führen. Im folgenden wollen wir die sogenannten einparametrischen Näherungsverfahren [3] zur Untersuchung der Grenzschicht eines Zweiphasenmediums anwenden. Dazu formulieren wir erst einmal den Impulssatz für eine Zweiphasenströmung.

III. Der Impulssatz

Wir betrachten eine stationäre Zweiphasenströmung in der Grenzschicht und schreiben die Gleichungen (11) in der Form

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (u_i^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u_i v_i)}{\partial y} &= U_i \frac{dU_i}{dx} + v_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \\ &+ \frac{K}{\varrho_i} \sum_{j=1}^2 [(u_j - U_j) - (u_i - U_i)] \\ \frac{\partial (U_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial (U_i v_i)}{\partial y} &= u_i \frac{dU_i}{dx} \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Danach subtrahieren wir in (13) die erste von der zweiten Gleichung und erhalten nach einfachen Umformungen

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [u_i(U_i - u_i)] + \frac{\partial}{\partial y} [v_i(U_i - u_i)] + (U_i - u_i) \frac{dU_i}{dx} \\ & + \frac{K}{\varrho_i} \sum_{j=1}^2 [(U_i - u_i) - (U_j - u_j)] = -v_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Integrieren wir nun über y von Null bis Unendlich und berücksichtigen dabei die Randbedingungen (12), dann gelangen wir zu der Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [u_i(U_i - u_i)] dy + \frac{dU_i}{dx} \int_0^{\infty} (U_i - u_i) dy \\ & + \frac{K}{\varrho_i} \sum_{j=1}^2 \left[\int_0^{\infty} (U_i - u_i) dy - \int_0^{\infty} (U_j - u_j) dy \right] = v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \Big|_{y=0}. \end{aligned}$$

Indem wir die Existenz der Integrale

$$\begin{aligned} (14) \quad & \int_0^{\infty} u_i(U_i - u_i) dy = U_i^2 \int_0^{\infty} \frac{u_i}{U_i} \left(1 - \frac{u_i}{U_i}\right) dy = U_i^2 \delta_i^{**} \\ & \int_0^{\infty} (U_i - u_i) dy = U_i \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u_i}{U_i}\right) dy = U_i \delta_i^* \end{aligned}$$

voraussetzen und die Wandschubspannungen für die einzelnen Phasen

$$\tau_w^{(i)} = \mu_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad \text{einführen, erhalten wir nach einigen Umformun-}$$

gen den folgenden Impulsatz

$$(15) \quad \frac{d\delta_i^{**}}{dx} + \frac{1}{U_i} \frac{dU_i}{dx} (2\delta_i^{**} + \delta_i^*) + \frac{K}{\varrho_i U_i^2} \sum_{j=1}^2 (U_i \delta_i^* - U_j \delta_j^*) = \frac{\tau_w^{(i)}}{\varrho_i^* U_i^2} \quad i = 1, 2.$$

Die in (14) definierten Größen δ_i^{**} und δ_i^* werden wir als Impulsverlustdicke und Verdrängungsdicke der i -ten Phase bezeichnen. Mit Hilfe des Impulsatzes können wir nun zur Behandlung der einparametrischen Näherungsverfahren zur Lösung von Grenzschichtproblemen bei Zweiphasenströmungen übergehen.

IV. Das Verfahren nach v. KÁRMÁN-POHLHAUSEN

Wie schon erwähnt wurde, ist die exakte Lösung des Gleichungssystems (11)–(12) wahrscheinlich nicht möglich. Man kann nun als erstes versuchen, die für die homogene Grenzschicht entwickelten einparametrischen Näherungsverfahren auf eine Zweiphasenströmung in der Grenzschicht zu übertragen. Der Grundgedanke dieser Verfahren besteht darin, an Stelle der exakten Geschwindigkeitsverteilungen in der Grenzschicht eine gewisse einparametrische Kurvenschar von Profilen zu verwenden. Der hierbei auftretende sogenannte „Formparameter“ ist eine Funktion der Längsordinate, die angibt, welches Profil der Schar man im jeweiligen Grenzschichtquerschnitt zu nehmen hat. Die entsprechende Gleichung zur Bestimmung des Formparameters findet man mit Hilfe des Impulssatzes (15). POHLHAUSEN folgend wählen wir die Schar der Geschwindigkeitsprofile für die einzelnen Phasen in der Grenzschicht in der Form

$$(16) \quad \varphi_i(\eta_i, \lambda_i) = \frac{u_i}{U_i} = \sum_{n=0}^4 a_n^{(i)} \eta_i^n \quad \eta_i = \frac{y}{\delta_i} \quad i = 1, 2$$

und bestimmen die Koeffizienten $a_n^{(i)}$ aus den Randbedingungen

$$(17) \quad \begin{aligned} \varphi_i &= 0 && \text{für } \eta_i = 0 \\ \varphi_i &= 1 \quad \frac{d\varphi_i}{d\eta_i} = 0 && \text{für } \eta_i = 1 \\ \frac{d^2\varphi_i}{d\eta_i^2} &= -\frac{\delta_i^2}{\nu_i} \left[U_i' + \frac{K}{\varrho_i U_i} \sum_{j=1}^2 (U_i - U_j) \right] && \text{für } \eta_i = 0 \\ \frac{d^2\varphi_i}{d\eta_i^2} &= 0 && \text{für } \eta_i = 1. \end{aligned}$$

Die vierte Randbedingung folgt aus der ersten Gleichung von (11); die letzte Randbedingung sagt aus, daß der Anschluß des Geschwindigkeitsprofils $u_i(x, y)$ an die Geschwindigkeit der Potentialströmung $U_i(x)$ von zweiter Ordnung ist.

Definieren wir als Formparameter

$$(18) \quad \lambda_i = - \left(\frac{d^2\varphi_i}{d\eta_i^2} \right) \Big|_{\eta_i=0} = \frac{\delta_i^2}{\nu_i} \alpha_i \quad i = 1, 2,$$

wobei $\alpha_i = U_i' + \frac{K}{\varrho_i U_i} \sum_{j=1}^2 (U_i - U_j)$ ist, dann erhalten wir für die Schar der Geschwindigkeitsprofile der Phasen

$$(19) \quad \varphi_i = \frac{u_i}{U_i} = \frac{12 + \lambda_i}{6} \eta_i - \frac{\lambda_i}{2} \eta_i^2 - \frac{4 - \lambda_i}{2} \eta_i^3 + \frac{6 - \lambda_i}{6} \eta_i^4.$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilungen der Phasen in der Grenzschicht müssen wir noch die λ_i finden. Hierzu werden wir den Impulsatz (15) verwenden, wobei wir zunächst von beliebigen Funktionen $\varphi_i(\eta_i, \lambda_i)$ ausgehen und folgende Funktionen von λ_i betrachten [siehe (14)]:

$$(20) \quad \frac{\delta_i^*}{\delta_i} = \int_0^1 (1 - \varphi_i) d\eta_i = H^*(\lambda_i) = H_i^*$$

$$\frac{\delta_i^{**}}{\delta_i} = \int_0^1 \varphi_i (1 - \varphi_i) d\eta_i = H^{**}(\lambda_i) = H_i^{**}.$$

Es sei angemerkt, daß wir es hier mit Grenzschichten endlicher Dicke für die Phasen zu tun haben. Weiterhin ist

$$(21) \quad \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta_i} \right|_{\eta_i=0} = \left. \frac{\partial (u_i/U_i)}{\partial (y/\delta_i)} \right|_{y=0} = \frac{\tau_w^{(i)} \sqrt{\lambda_i}}{U_i \sqrt{\mu_i \varrho_i^* \alpha_i}} = b(\lambda_i) = b_i.$$

Unter Berücksichtigung von (20) und (21) erhalten wir aus (15)

$$(22) \quad (H_i^{**} \delta_i)' + \frac{U_i'}{U_i} \delta_i (2 H_i^{**} + H_i^*)$$

$$+ \frac{K}{\varrho_i U_i^2} \sum_{j=1}^2 (U_i \delta_i H_i^* - U_j \delta_j H_j^*) = \sqrt{\frac{\nu_i \alpha_i}{U_i^2}} \frac{b_i}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Setzen wir hier δ_i aus (18) ein, dann gelangen wir zu der Gleichung

$$\lambda_i' \left(\frac{1}{2} H_i^{**} + \lambda_i \frac{dH_i^{**}}{d\lambda_i} \right) = \frac{U_i'}{U_i} [b_i - \lambda_i (2 H_i^{**} + H_i^*)]$$

$$+ \frac{1}{2} \lambda_i H_i^{**} \frac{\alpha_i'}{\alpha_i} + \frac{K}{\varrho_i U_i^2} \sum_{j=1}^2 \left[U_j \left(\sqrt{\frac{\nu_j \alpha_i}{\nu_i \alpha_j}} \sqrt{\lambda_j} \lambda_i H_j^* - b_i \right) \right.$$

$$\left. - U_i (\lambda_i H_i^* - b_i) \right],$$

die man nach einigen Umformungen in der Form

$$(23) \quad \lambda_i' = \frac{U_i'}{U_i} A_i + \frac{\alpha_i'}{\alpha_i} B_i + \frac{K}{\varrho_i U_i^2} \sum_{j=1}^2 \left[U_j \left(\sqrt{\frac{\nu_j \alpha_i}{\nu_i \alpha_j}} C_{ij} - D_i \right) - U_i E_i \right]$$

schreiben kann, wobei

$$A_i = A(\lambda_i) = \frac{1}{F_i} [b_i - \lambda_i (2 H_i^{**} + H_i^*)]$$

$$B_i = B(\lambda_i) = \frac{\lambda_i H_i^{**}}{2 F_i}$$

$$\begin{aligned}
 (24) \quad C_{ij} &= C(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{\sqrt{\lambda_i \lambda_j} H_j^*}{F_i} \\
 D_i &= D(\lambda_i) = \frac{b_i}{F_i} \\
 E_i &= E(\lambda_i) = \frac{1}{F_i} (\lambda_i H_i^* - b_i) \\
 F_i &= F(\lambda_i) = \frac{1}{2} H_i^{**} + \lambda_i \frac{dH_i^{**}}{d\lambda_i}
 \end{aligned}$$

sind. Das System (23) ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung der Formparameter λ_i für eine beliebige Schar von Geschwindigkeitsprofilen der Phasen $\varphi_i \left(\frac{y}{\delta_i}, \lambda_i \right)$.

Kehren wir zur POHLHAUSENSCHEN Schar von Geschwindigkeitsprofilen (19) zurück, so können wir die Funktionen H_i^* , H_i^{**} , b_i nach (20) und (21) berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 (25) \quad H_i^* &= \frac{3}{10} - \frac{\lambda_i}{120} \\
 H_i^{**} &= \frac{37}{315} - \frac{\lambda_i}{945} - \frac{\lambda_i^2}{9072} \\
 b_i &= 2 + \frac{\lambda_i}{6}.
 \end{aligned}$$

Setzen wir nun (25) in (24) und (23) ein, dann bekommen wir das entsprechende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung der λ_i , mit deren Hilfe wir dann schließlich nach (19) die Geschwindigkeitsverteilungen der Phasen in der Grenzschicht finden können. Die so erhaltenen Gleichungen sind recht kompliziert und können im allgemeinen Falle nur numerisch gelöst werden. Im nächsten Punkt behandeln wir mit dem soeben beschriebenen Verfahren ein einfaches Beispiel.

V. Die Umströmung einer Platte durch ein Zweiphasenmedium

Bei der Umströmung einer Platte sind die Geschwindigkeiten der Phasen in der Außenströmung $U_1 = \text{const.}$, $U_2 = \text{const.}$, und es sind $U_1' = U_2' = 0$. Aus (10) folgt, daß $U_1 = U_2 = U_0$ ist, und nach (9) haben wir dann $\frac{\partial p}{\partial x} \equiv 0$.

Sind noch $\varrho_1 = \varrho_2$, $\varrho_1^* = \varrho_2^*$, $\nu_1 = \nu_2$, dann haben wir es mit der Lösung von BLASIUS für eine Einkomponentenströmung zu tun.

Wenn also $U_1 = U_2 = U_0$ ist, dann ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, und unter Berücksichtigung von (25) erhalten wir aus (22)

$$(26) \quad a \delta_i \delta'_i + p_i \delta_i \sum_{j=1}^2 (\delta_j - \delta_i) = q_i \quad i = 1, 2,$$

wobei

$$(27) \quad a = \frac{37}{315} \quad p_i = \frac{3K}{10 q_i U_0} \quad q_i = \frac{2v_i}{U_0}$$

sind. Die exakte Lösung dieses Gleichungssystems im allgemeinen Fall ist auch für dieses einfache Problem mit großen Schwierigkeiten verbunden.

Wir suchen die Lösung von (26) in der Form

$$(28) \quad \delta_i = \delta_0 + \varepsilon_i \quad i = 1, 2.$$

Hierbei sei δ_0 die Grenzschichtdicke, die wir erhalten, wenn $\delta_1 = \delta_2$ ist, d. h., wenn eine Einphasenströmung vorliegt. Demzufolge genügt δ_0 der Gleichung

$$(29) \quad a \delta_0 \delta'_0 = q_0.$$

Integrieren wir diese Gleichung und berücksichtigen dabei, daß $\delta_0 = 0$ für $x = 0$ ist, dann erhalten wir

$$(30) \quad \delta_0 = \left(\frac{2 q_0 x}{a} \right)^{1/2}.$$

Nehmen wir nun an, daß wir δ_0 erhalten, wenn nur die erste Phase die Platte umströmt, dann können wir (30) in folgender Form schreiben

$$(31) \quad \delta_0 = 5,83 \sqrt{\frac{v_1 x}{U_0}}.$$

Setzen wir (28) in (26) ein und vernachlässigen alle Glieder zweiter Ordnung bezüglich ε_i , dann gelangen wir zu folgendem Gleichungssystem:

$$(32) \quad \begin{aligned} a \delta_0 \varepsilon'_1 + (a \delta'_0 + p_1 \delta_0) \varepsilon_1 - p_1 \delta_0 \varepsilon_2 &= 0, \\ a \delta_0 \varepsilon'_2 + (a \delta'_0 + p_2 \delta_0) \varepsilon_2 - p_2 \delta_0 \varepsilon_1 &= q_2 - q_1. \end{aligned}$$

Sind $p_1 \neq p_2$, $q_2 \neq q_1$, dann kann man (32) in eine lineare inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung überführen, deren Koeffizienten aber Funktionen von x sind. Nach (32) erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$(33) \quad \varepsilon_2 = \frac{a}{p_1} \varepsilon'_1 + \left(\frac{a \delta'_0}{p_1 \delta_0} + 1 \right) \varepsilon_1.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die zweite Gleichung von (32) ein, dann gelangen wir zu folgender linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter

Ordnung zur Bestimmung von ε_1

$$\begin{aligned} \delta_0 \varepsilon_1'' + \left[2 \delta_0' + \frac{\delta_0}{a} (\dot{p}_1 + \dot{p}_2) \right] \varepsilon_1' \\ + \left[\delta_0'' + \frac{\delta_0'}{a} (\dot{p}_1 + \dot{p}_2) \right] \varepsilon_1 = \frac{\dot{p}_1}{a^2} (q_2 - q_1). \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich nun in der Form

$$(34) \quad (\delta_0 \varepsilon_1' + F(x) \varepsilon_1)' = \frac{\dot{p}_1}{a^2} (q_2 - q_1)$$

schreiben, wobei

$$F(x) = \delta_0' + \frac{\delta_0}{a} (\dot{p}_1 + \dot{p}_2)$$

ist. Die Lösung von (34) suchen wir unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$(35) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1' = 0 \quad \text{für } x = 0.$$

Aus (34) erhalten wir unmittelbar

$$(36) \quad \delta_0 \varepsilon_1' + F(x) \varepsilon_1 = \frac{\dot{p}_1}{a^2} (q_2 - q_1) x + c_1.$$

Nach (35) ist $c_1 = 0$. Die Gleichung (36) ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die wir in der Gestalt

$$(37) \quad \varepsilon_1' + P(x) \varepsilon_1 = Q(x)$$

schreiben, wobei

$$(38) \quad \begin{aligned} P(x) &= \frac{\delta_0'}{\delta_0} + \frac{1}{a} (\dot{p}_1 + \dot{p}_2) \\ Q(x) &= \frac{\dot{p}_1}{a^2} (q_2 - q_1) \frac{x}{\delta_0} \end{aligned}$$

sind. Nach der Integration von (37) unter Berücksichtigung von (35) gelangen wir zu der Formel

$$(39) \quad \varepsilon_1 = \frac{\dot{p}_1 (q_2 - q_1)}{\delta_0 (\dot{p}_1 + \dot{p}_2)^2} \left\{ \frac{x}{a} (\dot{p}_1 + \dot{p}_2) - [1 - e^{-\frac{x}{a} (\dot{p}_1 + \dot{p}_2)}] \right\}.$$

Setzen wir dann (39) in (33) ein, so erhalten wir für ε_2

$$(40) \quad \varepsilon_2 = \frac{\dot{p}_1 (q_2 - q_1)}{\delta_0 (\dot{p}_1 + \dot{p}_2)^2} \left\{ \frac{x}{a} (\dot{p}_1 + \dot{p}_2) + \frac{\dot{p}_2}{\dot{p}_1} [1 - e^{-\frac{x}{a} (\dot{p}_1 + \dot{p}_2)}] \right\}.$$

Unter Berücksichtigung von (27), (39) und (40) finden wir dann aus (28)

$$(41) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= \delta_0 + \frac{20 \varrho_1 \varrho_2^2 (\nu_2 - \nu_1)}{3 K (\varrho_1 + \varrho_2)^2 \delta_0} \{\bar{x} - E(\bar{x})\} \\ \delta_2 &= \delta_0 + \frac{20 \varrho_1 \varrho_2^2 (\nu_2 - \nu_1)}{3 K (\varrho_1 + \varrho_2)^2 \delta_0} \left\{ \bar{x} + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} E(\bar{x}) \right\}, \end{aligned}$$

wobei

$$\delta_0 = 5,83 \sqrt{\frac{\nu_1 \bar{x}}{U_0}},$$

$$E(\bar{x}) = 1 - e^{-\bar{x}},$$

$$\bar{x} = 2,554 \cdot \frac{K}{U_0} \cdot \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1 \varrho_2} x$$

sind.

Lassen wir in (41) $\varrho_1 \rightarrow \varrho_2$ und $\nu_1 \rightarrow \nu_2$ streben, dann erhalten wir die entsprechende Formel für eine Einphasenströmung $\delta_i = \delta_0$, die von POHLHAUSEN gefunden wurde. Nach (20) und (21) gelangen wir unter Berücksichtigung von (25) zu folgenden Formeln für die Verdrängungsdicken, Impulsverlustdicken und Wandschubspannungen der einzelnen Phasen

$$(42) \quad \delta_i^* = 0,3 \delta_i \quad \delta_i^{**} = 0,1175 \delta_i \quad \tau_w^{(i)} = \frac{2 \mu_i U_0}{\delta_i} \quad i = 1, 2.$$

Schließlich können wir noch gemäß (19) die Geschwindigkeitsprofile für die Phasen in der Grenzschicht wie folgt schreiben:

$$(43) \quad u_i = U_0 \left\{ \frac{2y}{\delta_i} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta_i} \right)^2 \right] + \left(\frac{y}{\delta_i} \right)^4 \right\} \quad i = 1, 2.$$

Für die numerische Auswertung ist es sinnvoll, in (41)–(43) zu dimensionslosen Formeln überzugehen. Wir geben die vier dimensionslosen Parameter

$$f_1 \quad \text{Re}_1 = \frac{L U_0}{\nu_1} \quad \alpha^* = \frac{\varrho_1^*}{\varrho_2^*} \quad \beta = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

vor und erhalten dann aus (41)

$$(44) \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_0 + \frac{20 (1 - \beta)}{3 K^* (\alpha + 1) \beta \Delta_0 \text{Re}_1} \{\bar{\xi} - E(\bar{\xi})\} \\ \Delta_2 &= \Delta_0 + \frac{20 (1 - \beta)}{3 K^* (\alpha + 1) \beta \Delta_0 \text{Re}_1} \{\bar{\xi} + \alpha E(\bar{\xi})\}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 5,83 \sqrt{\frac{\xi}{\text{Re}_1}}, \\
 E(\bar{\xi}) &= 1 - e^{-\bar{\xi}}, \\
 \bar{\xi} &= 2,554 \cdot K^* (\alpha + 1) \xi, \\
 \alpha &= \frac{f_1 \alpha^*}{1 - f_1}
 \end{aligned}$$

und L – die Länge der Platte, $A_i = \frac{\delta_i}{L}$, $\xi = \frac{x}{L}$ und $K^* = \frac{KL}{U_0 \varrho_1}$ – der dimensionslose Wechselwirkungskoeffizient sind.

Schließlich ergeben sich noch aus (42) und (43) die dimensionsfreien Formeln für die Verdrängungsdicken, Impulsverlustdicken, Wandschubspannungen und Geschwindigkeitsprofile der einzelnen Phasen

$$\begin{aligned}
 (45) \quad A_i^* &= 0,3 A_i \quad A_i^{**} = 0,1175 A_i \\
 \bar{\tau}_w^{(1)} &= \frac{2}{A_1} \quad \bar{\tau}_w^{(2)} = \frac{2}{\alpha^* \beta A_2} \\
 \varphi_i &= \frac{u_i}{U_0} = \frac{2 \eta}{A_i} \left[1 - \left(\frac{\eta}{A_i} \right)^2 \right] + \left(\frac{\eta}{A_i} \right)^4 \quad i = 1, 2,
 \end{aligned}$$

wobei $\eta = \frac{y}{L}$ und $\bar{\tau}_w^{(i)} = \frac{\tau_w^{(i)} L}{\mu_i U_0}$ sind.

Die exakte Beschreibung des Verlaufs der Grenzschicht bei einer Zweiphasenströmung wird durch folgende Aspekte beeinträchtigt: Wie aus (44) und (45) zu ersehen ist, sind alle Größen bestimmt, bis auf den Wechselwirkungskoeffizient K^* . Theoretische und halbempirische Methoden zur Bestimmung von K^* sind so gut wie gar nicht ausgearbeitet. Man kann sich zur Zeit bei der Auffindung von K^* nur auf experimentelle Befunde stützen. Weiterhin sind wir bei der Lösungsfindung davon ausgegangen, daß wir die Lösung in der Form $\delta_i = \delta_0 + \varepsilon_i$ suchen, d. h. ε_i soll klein gegenüber δ_0 sein, und alle Glieder zweiter Ordnung bezüglich ε_i werden vernachlässigt. Wie aus (44) zu ersehen ist, bedeutet diese lineare Näherung, daß $(1 - \beta)$ klein sein muß. Demzufolge können wir mit den erhaltenen Ergebnissen nur solche Zweiphasenströmungen untersuchen, bei denen sich v_1 und v_2 nur wenig voneinander unterscheiden. Wenn das nicht der Fall ist, muß man auf die analytische oder numerische Lösung der Gleichung (26) zurückgreifen.

Damit wir aber einen Eindruck davon bekommen, wie die Struktur der Grenzschicht bei einer Zweiphasenströmung gartet ist, betrachten wir mit

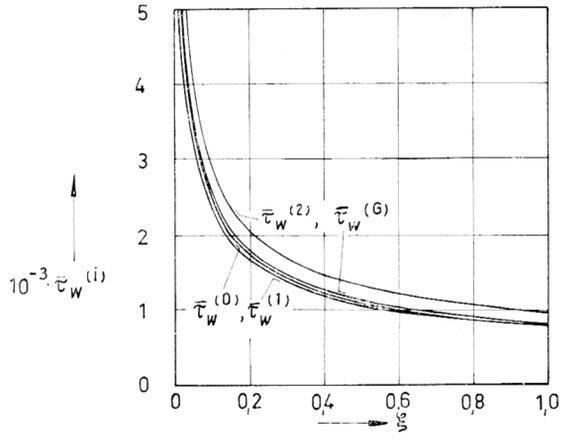
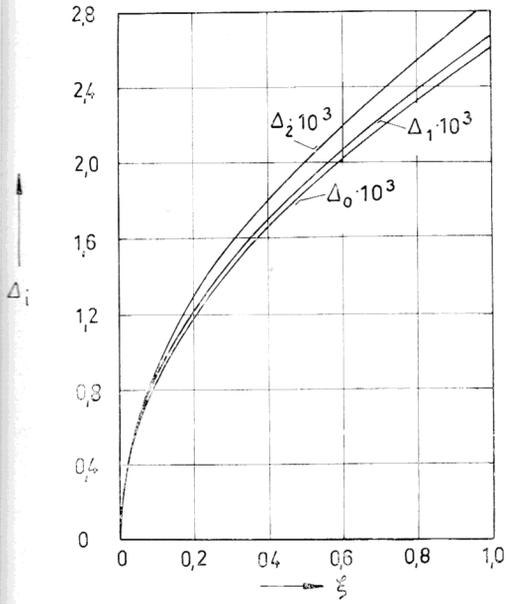


Abb. 1.

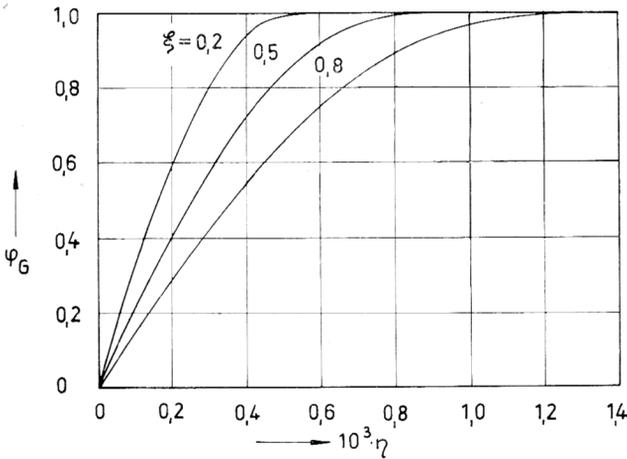
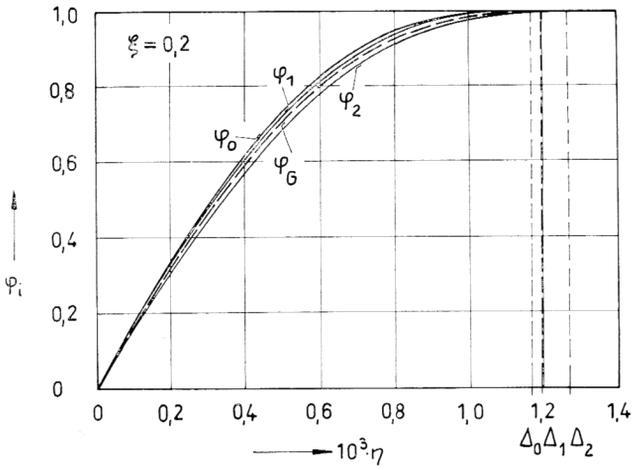


Abb. 2.

Hilfe der Formeln (44) und (45) ein einfaches Beispiel, das uns natürlich nur qualitative Aussagen liefern kann. Es werden folgende Parameter willkürlich vorgegeben:

$$(46) \quad f_1 = 0,75 \quad \text{Re}_1 = 5 \cdot 10^6 \quad \alpha^* = 0,8 \quad K^* = 40 \quad \beta = 0,95.$$

Dabei bewegen wir uns im Rahmen der linearen Näherung, und K^* hat ungefähr die Größenordnung, die die Wechselwirkungskoeffizienten haben, die für gewisse Substanzen experimentell ermittelt wurden [4, 5]. Für die Parameter (46) sind die Formeln (44) und (45) ausgewertet und die erhaltenen Ergebnisse in den nachfolgenden Kurvenbildern dargestellt worden. Wie gut nun die lineare Näherung mit der Wirklichkeit übereinstimmt, muß durch experimentelle Arbeiten überprüft werden.

Aus dem angegebenen qualitativen Beispiel kann man nun folgende Schlußfolgerungen ziehen:

In unserem Falle sind

$$f_1 > f_2 \quad \varrho_1^* < \varrho_2^* \quad \nu_1 < \nu_2.$$

Wie aus den Grafiken zu ersehen ist, sind dann für einen bestimmten Querschnitt ξ

$$\Delta_0 < \Delta_1 < \Delta_2$$

$$\bar{\tau}_w^{(1)} < \bar{\tau}_w^{(0)} < \bar{\tau}_w^{(G)} < \bar{\tau}_w^{(2)},$$

für $\xi = 0,2$ und ein bestimmtes η

$$\varphi_2 < \varphi_G < \varphi_1 < \varphi_0,$$

und für ein festes η fällt φ_G mit wachsendem ξ ab.

Hieraus folgt:

Wird die Platte nur von der ersten Phase umströmt, dann ist die so auftretende Grenzschichtdicke Δ_0 kleiner als die Grenzschichtdicke der ersten Phase Δ_1 in einem Zweiphasenmedium, in dem die zweite die zähere Phase und in einer geringeren Konzentration vorhanden ist. In diesem Fall ist aber $\Delta_1 < \Delta_2$. Für die Wandschubspannungen gilt umgekehrt $\bar{\tau}_w^{(1)} < \bar{\tau}_w^{(0)}$, aber auch hier ist $\bar{\tau}_w^{(1)} < \bar{\tau}_w^{(2)}$. Interessant ist hier noch, daß die Werte für die Wandschubspannung des Gemisches $\tau_w^{(G)}$ zwischen den Werten von $\bar{\tau}_w^{(1)}$ und $\bar{\tau}_w^{(2)}$ liegen und außerdem $\bar{\tau}_w^{(0)} < \bar{\tau}_w^{(G)}$ ist. Für die Geschwindigkeitsprofile liegt die Geschwindigkeit des Gemisches φ_G ebenfalls zwischen φ_1 und φ_2 , aber es gilt, im Vergleich zu den Wandschubspannungen, die umgekehrte Ungleichung.

Allgemein ist zu sagen, daß die Kurven für Δ_i , $\bar{\tau}_w^{(i)}$, φ_i qualitativ genauso verlaufen wie für homogene Medien.

Literaturverzeichnis

- [1] РАХМАТУЛЛИН, Х. А., Основы гидродинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред, ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
- [2] KÁRMÁN, TH., Über laminare und turbulente Reibung, ZAMM 1, 233 (1921).
ROHLHAUSEN, K., Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht, ZAMM 1, 235 (1921).
- [3] Лойцянский, Л. Г., Ламинарный пограничный слой, ФМизд., М., 1962.
- [4] ФАЙЗУЛЛАЕВ, Д. Ф., Ламинарное движение многофазных сред в трубопроводах, Ташкент, Изд-во „Фан“, УзССР, 1966.
- [5] ФАЙЗУЛЛАЕВ, Д. Ф., Р. С. ГУРБАНОВ, Я. М. РАСИЗАДЕ, Элементы гидравлики смесей Ташкент, Изд-во „Фан“, УзССР, 1970.

Eingegangen: 29. Dezember 1970

Physik

U. KASPER

Zentralinstitut für Astrophysik, Potsdam-Babelsberg, der Dt. Akad. Wiss.

Zur Interpretation der TREDER schen Tetradentheorie der Gravitation

Abstract

If one describes the gravitational field by 16 "quantities" $h^A_{\bar{k}}$ ($A = 0, \dots, 3$; $\bar{k} = 0, \dots, 3$) and determines these $h^A_{\bar{k}}$ as solution of a system of differential equations, one will say gravitation designs a certain frame of reference [1] and breaks down the general principle of relativity.¹⁾

We are going to express in a little more extensive form what that proposition means and what is going to achieve by the determination of a frame of reference.

Wir gehen vom gravitationsfreien MINKOWSKI-Raum aus. Die Standardkoordinaten bezeichnen wir mit x^k . Zu diesen Koordinaten gehören die natürliche Basis $\vec{e}_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}$ und die dazu duale Basis $e^k \equiv dx^k$. Gehen wir von den Koordinaten x^k zu den Koordinaten $x^{\bar{k}}$ über, dann gehört zu diesen Koordinaten die natürliche Basis $\vec{e}_{\bar{k}} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\bar{k}}}$ und die dazu duale Basis $e^{\bar{k}} \equiv dx^{\bar{k}}$. Es gelten die Beziehungen

$$(1) \quad \vec{e}_k = \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k} \vec{e}_{\bar{k}}, \quad e^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{k}}} e^{\bar{k}},$$

$$(2) \quad \vec{e}_{\bar{k}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{\bar{k}}} \vec{e}_k, \quad e^{\bar{k}} = \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k} e^k.$$

¹⁾ Eine andere Darstellung über die Brechung des allgemeinen Relativitätsprinzips in einer derartigen Gravitationstheorie ist auch in [2] gegeben worden.